

修士学位論文

超伝導渦糸状態における核磁気緩和率の理論的研究

平成16年度

広域科学専攻 相関基礎科学系

学籍番号 26922

田村弘徳

目次

第 1 章 Introduction	4
1.1 はじめに	4
1.2 Sr_2RuO_4 超伝導体	4
1.2.1 異方的超伝状態の示唆	4
1.2.2 d ベクトルと Sr_2RuO_4 超伝導体の秩序状態	5
1.2.3 positive vortex 状態と negative vortex 状態	7
1.2.4 ナイトシフトの測定結果	8
1.3 vortex に関する過去の研究	10
1.4 核磁気緩和率の理論的研究	13
1.5 研究目的	15
第 2 章 B-dG 方程式	16
2.1 B-dG 方程式の導出	16
2.2 確率振幅 u_n , v_n に対する規格直交性	19
2.3 確率振幅 u_n , v_n を用いた Green 関数の表式	22
2.4 B-dG 方程式の解	25
2.4.1 S 波 vortex の場合	25
2.4.2 カイラル p 波 positive vortex の場合	33
2.4.3 カイラル p 波 negative vortex の場合	38
2.4.4 解の規格化	41
第 3 章 核磁気緩和率	47
3.1 帯磁率を用いた核磁気緩和率の表式	47
3.2 確率振幅 u_n , v_n による表式	53
3.3 核磁気緩和率の導出	57
3.3.1 S 波 vortex の場合	57
3.3.2 カイラル p 波 positive vortex の場合	64
3.3.3 カイラル p 波 negative vortex の場合	71
第 4 章 核磁気緩和率の結果	77
第 5 章 議論とまとめ	82
5.1 準古典理論との比較	82
5.2 カイラル p 波 negative vortex の結果に関する考察	85
5.3 実験に対する提案	86
5.4 本研究の位置づけと今後の課題	88
5.5 まとめ	88

付 録 A : 準古典理論	89
A.1 準古典方程式	89
A.2 準古典 Green 関数を用いた核磁気緩和率の表式	90
A.3 渦糸状態における核磁気緩和率	91

第1章 Introduction

1.1 はじめに

超伝導体を弱磁場中におくとマイスナー効果により磁場が排除されるが第2種超伝導体では部分的に磁束が侵入する。この磁束はその周りを回転する反磁性電流を伴うため渦糸 (vortex) と呼ばれる。渦糸に関する理論は1950年代末から60年代にわたって研究され基本的な理論はその時期に作られている。一方、1982年に走査型トンネル顕微鏡 (STM) という高い空間分解能を持つ装置が開発される。そして1989年にH.F.Hessらが vortex の鮮明な像を撮影する。これが火種となって再び vortex の理論的研究が活発になった。特に1986年に銅酸化物高温超伝導体が発見されるが、その秩序状態の探求においてSTMは大きな役割を果たしている。近年 Sr_2RuO_4 が超伝導を示すことが発見され、その秩序状態がスピン3重項、具体的に言うとカイラル p 波超伝導状態である可能性が高いという提案もあり頻繁に研究されている。カイラル p 波超伝導状態は時間反転対称性の破れを持つため興味深い現象が起こると期待されており、理論的にも熱心に研究されている。そこで本研究ではカイラル p 波の秩序状態を持ち vortex が存在する系を対象とした。次の節からその研究報告に関して部分的に説明することにする。

1.2 Sr_2RuO_4 超伝導体

1.2.1 異方的超伝状態の示唆

Sr_2RuO_4 は1994年にMaenoらにより超伝導体であることが始めて発見された。[1] その構造は銅酸化物高温超伝導体 $\text{La}_{2-x}\text{Ba}_x\text{CuO}_4$ とよく似ているが低い転移温度 ($T_c \sim 1.5\text{K}$) を持つ。2価のCuのかわりに4価のRuが使われているために酸化物高温超伝導体での強いスピンゆらぎが存在せず、転移温度が低くなっているのである。 Sr_2RuO_4 の注目されている点は、それがスピン3重項の超伝導体である可能性が非常に高いことにある。スピン3重項のクーパーペアをつくる物質としては ^3He (ただし電氣的に中性であり超流動を示す。) が有名であるが、超伝導を示すスピン3重項の物質はあまり見つかっていない。(UPt₃ 超伝導体などはスピン3重項であると考えられている。) そのため Sr_2RuO_4 はスピン3重項超伝導体のメカニズムを解明する上での重要な物質であると期待される。

Sr_2RuO_4 超伝導体の初期の研究における異方的超伝導状態を示唆する実験データとして、核磁気緩和率でのHebel-Slichterピークが存在しないことが挙げられる。S波超伝導体で温度を降下させながら核磁気緩和率を測定した時、十分低温では指数関数的に減衰するが T_c 直下では急な傾斜をもって増加しピークを持つ。(図1.1参照) これをHebel-Slichterピークという。その原因は、超伝導転移前後において電子-核スピン間相互作用はあまり変化しないのに対しフェルミ面近傍 (ギャップの端) の状態密度は急増することにある。S波以外の超伝導体ではエネルギーギャップの位相がフェルミ面上で変化するため電子-核スピンの相互作用の寄与は打ち消しあい、Hebel-Slichterピークは現れない。したがって Sr_2RuO_4 における実験結果はそれが異方的超伝導状態であることを示唆している。この実験結果はIshidaらによって得られている。[4]

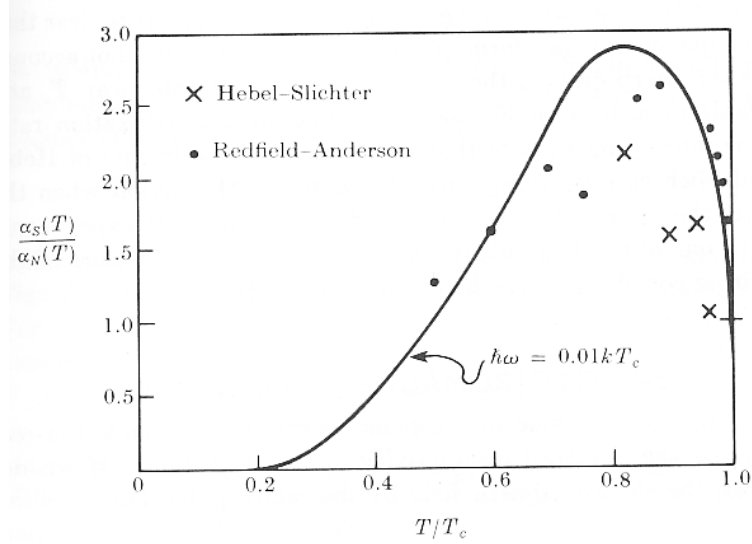


図 1.1: 核磁気緩和率における Hebel-Slichter ピーク ([2] より引用)

1.2.2 d ベクトルと Sr_2RuO_4 超伝導体の秩序状態

Sr_2RuO_4 超伝導体は、それが異方的超伝導体であることを実験的に示される前から Rice、Sigrist らによりスピン 3 重項であることを予期されていた。[7] この理由としては Sr_2RuO_4 の正常状態が低温でフェルミ液体になっておりその振舞いが ^3He の場合と似ていることや、 SrRuO_3 などの反磁性的スピンゆらぎを示す一連の混合物のグループに属することなどが挙げられる。現在では Ishida らによるナイトシフトの測定（すぐ後で説明する。）等によりスピン 3 重項であることは強く信じられている。したがって本文においても 3 重項を仮定して話を進めていく。

超伝導の秩序状態を表す便利な方法として d ベクトルによる表記法がある。それについて説明する。

クーパーペアの波動関数はスピン-軌道間の相互作用が弱いとき、よい近似としてスピン部分と軌道部分に分解できる。この 2 つの部分の積で全波動関数を表した時フェルミ統計よりそれは反対称性を持たなくてはならない。よって波動関数の軌道部分はスピン 1 重項の場合対称に、3 重項の場合には反対称になる必要がある。このことから S 波（軌道角運動量 $L=0$ ）や d 波（ $L=2$ ）の場合はスピン 1 重項で、p 波（ $L=1$ ）の場合はスピン 3 重項となる。

クーパーペアを組む 2 つの粒子のスピンに着目すると、その組合せに伴って 4 種類のギャップ関数を考えることができる。

$$\Delta(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{k}) & \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{k}) \\ \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k}) & \Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k}) \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

1 重項の場合にはギャップ関数は 1 種類、3 重項の場合は 3 種類存在し、上述の議論から

$$1 \text{ 重項: } \Delta_{\uparrow\uparrow}(\mathbf{k}) = \Delta_{\downarrow\downarrow}(\mathbf{k}) = 0, \quad \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{k}) = -\Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k})$$

$$3 \text{ 重項: } \Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{k}) = \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{k}) \equiv \Delta_0(\mathbf{k})$$

が成立する。¹ここで 3 重項に対して d ベクトルを次のように導入する。

$$\Delta(\mathbf{k}) = \begin{bmatrix} \Delta_{\uparrow\uparrow} & \Delta_{\uparrow\downarrow} \\ \Delta_{\downarrow\uparrow} & \Delta_{\downarrow\downarrow} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -d_x + id_y & d_z \\ d_z & d_x + id_y \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

d ベクトルによりスピン空間の回転を 3 次元ベクトルの的に扱うことができる。それは次の議論からわかる。

¹繰り返しになるが 1 重項に関してはスピンの入れ換えに対し反対称、3 重項に関しては対称になる。

ギャップ関数はクーパーペアの波動関数の性質を持っており、その状態ベクトルを $|\psi\rangle$ とおくと

$$|\psi\rangle = \Delta_{\uparrow\uparrow}|\uparrow\uparrow\rangle + \Delta_{\downarrow\downarrow}|\downarrow\downarrow\rangle + \Delta_0(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \quad (1.3)$$

とかける。ここで $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$, $|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle$ の代わりに次のような基底 $|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle$ をとることにして

$$\begin{aligned} |x\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \\ |y\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle) \\ |z\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \end{aligned} \quad (1.4)$$

とおく。状態 $|x\rangle, |y\rangle, |z\rangle$ のスピン成分を考えると、各々 $S_x = 0$, $S_y = 0$, $S_z = 0$ となっている。この基底を用いると

$$|\psi\rangle = \sqrt{2}(d_x|x\rangle + d_y|y\rangle + d_z|z\rangle) \quad (1.5)$$

とかける。したがって $\mathbf{d}$ ベクトルはスピン空間における回転に対して 3 次元ベクトル的に変換されることになる。

$\mathbf{d}$ ベクトルを用いて準粒子の励起エネルギー E_k を表すと次のようになる。

$$E_k = \sqrt{\epsilon_k^2 + \mathbf{d} \cdot \mathbf{d}^* \pm |\mathbf{d} \times \mathbf{d}^*|} \quad (1.6)$$

$\mathbf{d} \times \mathbf{d}^* = 0$ が成立するような場合をユニタリー状態と呼ぶ。この状態に対しては物理的解釈を行いやすく、また ^3He においてはエネルギー的に安定な状態としても観測されている。ユニタリー状態において秩序状態 $\Delta(\mathbf{k})$ がある $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ ベクトルをもつ時、そのクーパーペアの $\mathbf{d}(\mathbf{k})$ 方向スピン成分はゼロ（つまりスピンを $\mathbf{S}$ として $\mathbf{d}(\mathbf{k}) \perp \mathbf{S}$ ）となり、 $|\mathbf{d}(\mathbf{k})|$ はギャップの大きさの意味する。

Sr_2RuO_4 の秩序状態として最も有力視されているのは

$$\mathbf{d}(\mathbf{k}) = \Delta_0 \mathbf{z} (k_x \pm ik_y) \quad (1.7)$$

である。この表式からわかるのはフェルミ面上のすべての点でスピンの方向が一方向を向いており、軌道部分に関しては角運動量 $L = 1$ の状態になっていることである。² クーパーペアを組む 2 粒子の運動を考える時、仮に格子が存在しないとするとスピン、軌道角運動量はよい量子数になる。（ ^3He の場合は厳密にそのようになっている。） Sr_2RuO_4 に関しては弱いスピン-軌道間相互作用が存在しスピンを結晶の c 軸に垂直な平面上に固定する。しかしその相互作用はあまり強くなく軌道角運動量固有状態に大きな変化は与えない。そのため上記のように秩序状態を角運動量の固有状態で表すことができる。この状態を説明しているのが図 1.2 である。スピン 1 重項のため対のスピンは平行に描かれている。大きい矢印は軌道角運動量を表しておりスピンに対し垂直（つまり c 軸に平行）になっている。³

この秩序状態においてギャップの大きさは

$$|\Delta(\mathbf{k})| = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$$

Sr_2RuO_4 のフェルミ面は円柱形をしており⁴、ギャップはフェルミ面上で等方的に開いていることになる。（図 1.3 参照。）

²このことが時間反転対称性の破れにつながる。

³これは (1.7) 式からいえることではなく系に特有の方向（ c 軸方向）が存在することからきている。

⁴正常状態での観測から Sr_2RuO_4 は 3 つのフェルミ面を持つことがわかっている。現在その内の 1 つが超伝導状態に寄与すると考えられており、そこから図 1.3 のように 1 つの円柱状の面を想定した。

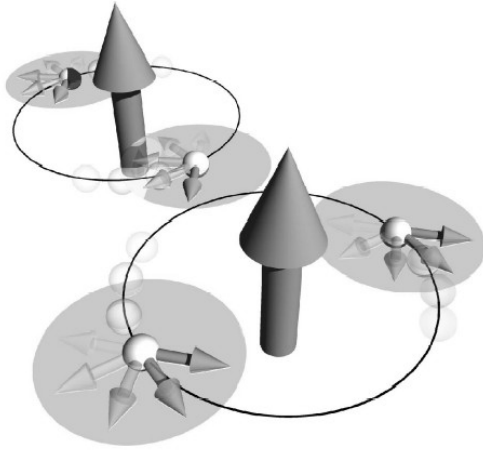


図 1.2: Sr_2RuO_4 において考えられている秩序状態
大きい矢印がクーパーペアの軌道角運動量を、小さい
矢印がスピンを表す。スピンは軌道角運動量に対し垂
直方向を向いている。スピン 3 重項状態であるため 2
つの粒子のスピンはそろえて描かれている。([3] より
引用。)

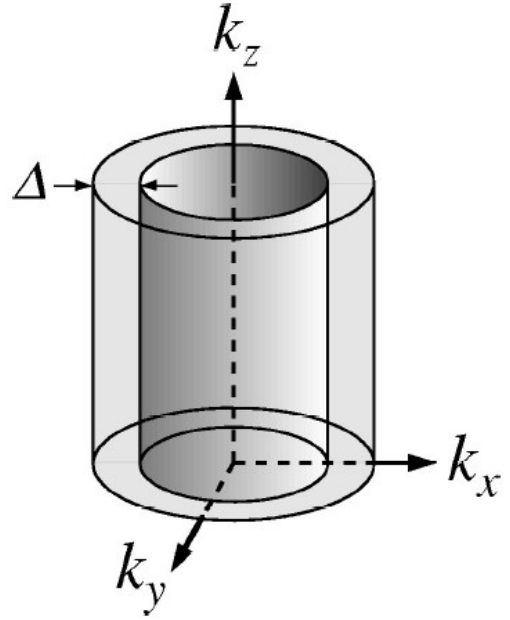


図 1.3: (1.7) 式の秩序状態に対応するエネルギーギャ
ップ ([3] より引用。)

1.2.3 positive vortex 状態と negative vortex 状態

(1.7) 式での符号 $\pm$ が示すようにカイラル p 波において 2 つの状態が存在する。この符号 $\pm$ はクーパーペアの相対運動における角運動量 z 成分 L_z が 1 であるか -1 であるかに対応する。vortex の存在する系ではこのことが物理的にはっきりとした違いを持ち、クーパーペアの重心の回転する方向に対し相対運動のそれが同方向であるか（この場合を positive vortex という。）反対方向であるか（この場合を negative vortex という。）を表す。2 つの場合のクーパーペアの様子を図 1.4、図 1.5 に示す。

positive vortex と negative vortex の状態はゼロ磁場において縮退しており、有限の磁場が存在する場合それが解けて negative vortex のほうが安定化することが知られている。[14] このことから超伝導状態にした後に磁場を加えた時、2 つの状態は共存しドメイン構造をとると考えられる。R.Heeb と D.F.Agterberg はカイラル p 波超伝導状態に対し各々の vortex 状態における臨界磁場 H_{c1} 近傍での安定性を 2 成分 G-L 理論により議論した。彼らはパラメータにより positive vortex にも negative vortex にもなりうるような秩序状態を設定し数値計算により自由エネルギーを極小にする状態を求めた。その結果として positive vortex に近い安定状態（vortex の遠方では完全に positive vortex の秩序状態になる。）と negative vortex に近い安定状態（positive vortex の場合と同様。）を得た。2 つの状態における臨界磁場 H_{c1} を比較すると $\sqrt{2}B_c = \Phi_0/(2\pi\lambda\xi)$ (Φ_0 : 磁束量子、 λ : 侵入長、 ξ : 相関長) として

$$H_{c1} = 0.47B_c, \quad \text{for positive vortex}$$

$$H_{c1} = 0.43B_c, \quad \text{for negative vortex}$$

となる。2 つの状態のエネルギー差はそれほど小さくなくドメイン構造による準安定状態が成立するものと本論文では考えて話を進めることにする。

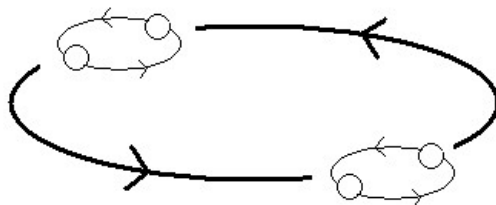


図 1.4: positive-vortex におけるクーパーペアの運動の様子
太い矢印が重心運動の回転方向を、細い矢印が相対運動の回転方向を表す。

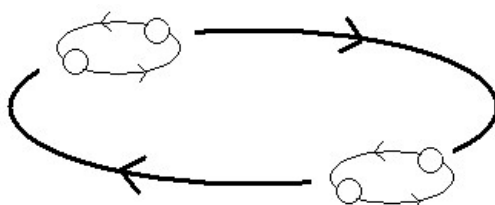


図 1.5: negative-vortex におけるクーパーペアの運動の様子
太い矢印が重心運動の回転方向を、細い矢印が相対運動の回転方向を表す。

1.2.4 ナイトシフトの測定結果

Sr_2RuO_4 超伝導体がスピン 3 重項であることを示す最も重要な実験として Ishida らによるナイトシフトの測定がある。[8] これについて説明する。

スピン縮退したフェルミ液体に対し磁場をかけるとゼーマン分裂が起こる。しかし弱磁場中のスピン 1 重項超伝導体において温度を下げていくと、対凝縮が大きくなるのに伴ない帯磁率は減少し $T \rightarrow 0$ の極限ではゼーマン分裂が起こらなくなる。これは磁場に応じてスピンの向きを固定させるより上向きスピンと下向きスピンのクーパーペアを組み凝縮エネルギーを得るほうがエネルギー的に有利なためである。温度の降下で凝縮エネルギーが大きくなるにしたがい帯磁率は低下していく。ところがスピン 3 重項の場合はそうはならない。3 重項の場合は対を組む粒子のスピンをそろえることができるため磁場に対し有利なようにスピンの向きを固定させてもそれが対破壊を起こすことはない。したがって超伝導の発現が帯磁率に影響を与えることはなくゼロ温度の極限でもそれは有限に残る。

このことから試料の帯磁率を見れば 1 重項状態と 3 重項状態を区別できることがわかる。しかし測定上で問題になるのがマイスナー効果の存在である。帯磁率の長波長成分ではそれによる反磁性の影響が大きく、スピンによる内部磁場の測定を困難にするのである。これに対しナイトシフトの測定ではその困難がかなり抑えられる。GL パラメーター κ (侵入長 / 相関長) の大きい第 2 種超伝導体では侵入する磁束によるナイトシフトへの寄与は $\sim 10^{-4}$ 程度になり、粒子のもつスピンによる寄与 (10^{-2} 以下) に比べて十分小さいことがわかっている。⁵図 1.6 に Ishida らによる測定結果が記してある。見てわかるように超伝導状態において温度を下げていってもナイトシフトは一定値になっている。上述の帯磁率の議論と同じような理屈から 1 重項の場合には温度の低下に伴うナイトシフトの減衰があるはずであり、図 1.6 の結果は Sr_2RuO_4 超伝導体が 3 重項であることを強く示唆している。

Ishida らの測定結果は単に 3 重項であることを示しているだけでなくその秩序状態に関する情報も与えてくれる。ここで 3 重項状態での磁場に対する応答を簡単に考察する。まず磁場 $\mathbf{H}$ が $\mathbf{d}$ ベクトルに垂直にかけられた場合を考える。磁場 $\mathbf{H}$ の向きにスピンの量子化軸 (z 軸) をとると $d_z = 0$ となる。このと

⁵参考文献 [3] の •. E. 1 を参照。

きの対の状態は (1.2) 式より $\Delta_{\uparrow\downarrow} = 0$ の状態であることがわかる。⁶ よって $\uparrow\uparrow$ か $\downarrow\downarrow$ の対しか存在しないことになり前述の議論のように対凝縮による帯磁率の変化は起きない。一方磁場 $\mathbf{H}$ が $\mathbf{d}$ ベクトルに並行にかけられた場合、磁場 $\mathbf{H}$ の向きにスピンの量子化軸をとって $d_x = d_y = 0 \Rightarrow \Delta_{\uparrow\uparrow} = \Delta_{\downarrow\downarrow} = 0$ 、つまり $\uparrow\downarrow$ の対のみが存在することになる。(1 重項の場合と類似している。) よって凝縮が大きくなるにつれ帯磁率は減少する。Ishida らの測定結果において注目すべき点は超伝導状態で温度を低下させてもナイトシフトの減衰が少しも見られないことにある。上述の議論によると仮にフェルミ面上の状態が様々な方向の $\mathbf{d}$ ベクトルを持つとすると多少にせよ温度の低下に伴う減衰が起こることになる。それが無いということは全フェルミ面上で $\mathbf{d}$ ベクトルは全て磁場に垂直な方向をむいていることを意味する。現時点において、はっきりした証明はないが Sr_2RuO_4 の $\mathbf{d}$ ベクトルはスピン-軌道間相互作用により c 軸方向にピン止めされていると考えられている。

Sr_2RuO_4 の秩序状態はこの特性と結晶の対称性 (正方晶) から類推することができる。⁷ まず 2 次元のフェルミ面を持つ p 波超伝導の秩序状態を想定し、正方晶の対称性を持つものとして点群 D_{4h} の既約表現をリストアップすることを考える。そのうち全フェルミ面上で $\mathbf{d}$ ベクトルの方向が同じになるもののみを取り出すと数個に絞られる。その中の一つが (1.7) 式の秩序状態 $\mathbf{z}(k_x \pm ik_y)$ であり、ギャップにノードが存在せずエネルギー的に最も安定な状態となることがいえる。この状態は時間反転対称性の破れを伴うことをすぐに示すことができ次に述べるミュオンの磁気緩和率 (μSR) の実験結果とも一致するものとなっている。

(1.7) 式の秩序状態からわかるように Sr_2RuO_4 の超伝導状態は軌道とスピンの両方からくる磁気モーメントを持つと考えられている。しかしマイスナー効果が働くためそれは強く抑えられ実際に磁気モーメントを持つかどうかは疑問な点であった。その疑問にたいし光を与えたのがミュオンの磁気緩和率の測定である。[9] この実験で Luke らはミュオンのスピン緩和において静的な磁場によると考えられる寄与を観測している。 Sr_2RuO_4 の超伝導状態には渦糸やドメイン構造の境界が存在すると考えられており、そこに侵入した磁束がわずかな磁気モーメントを与えると解釈されている。この実験結果も Sr_2RuO_4 での 3 重項超伝導状態を強く支持している。

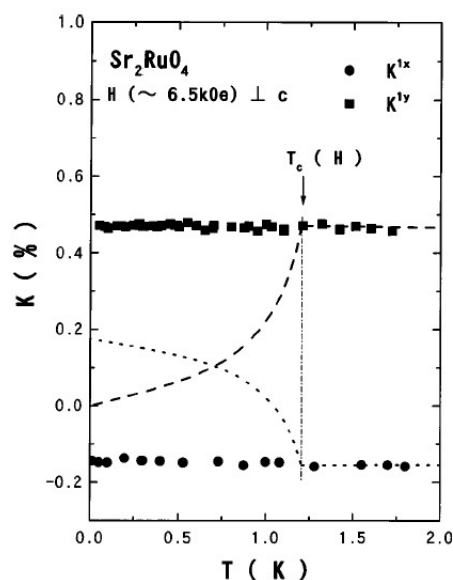


図 1.6: Sr_2RuO_4 に対するナイトシフトの測定

点線はスピン 1 重項状態である $d_{x^2-y^2}$ の秩序状態を仮定して得られる理論曲線である。 $T < T_c$ においてナイトシフト K が減衰しないことがスピン 3 重項状態であることを強く支持している。([8] より)

⁶ この議論からも $\mathbf{d}$ ベクトルの恩恵がわかる。

⁷ 参考文献 [3] の • を参照。

1.3 vortexに関する過去の研究

境界や渦糸が存在し空間的に一様でない超伝導状態を扱う場合、一般に Bogoliubov-de Gennes 方程式 (B-dG 方程式) や Gor'kov 方程式を出発点とする。[12]Gor'kov 方程式は Green 関数に対する運動方程式である。多くの場合これを解くのは数学的に困難であり、近似的評価として準古典理論 (付録 A 参照。) が用いられる。準古典理論ではまず Green 関数に対し運動量の絶対値に関する積分を実行してしまい、それを用いることで Gor'kov 方程式を解析しやすい方程式におとしていく。この方法を用いるとクーパー対の相対座標においてフェルミ波数程度の激しい振動を平均化して扱うことになり簡潔な表現を得られるものの、その物理的解釈を行うときに各量の意味を汲み取りにくいという欠点がある。特に渦糸の物理を扱う場合準古典理論では Andreev 散乱という直線的な粒子の運動によって議論することになり渦糸の存在する回転対称な系においては物理的描像を描きにくいという難点がある。

一方、B-dG 方程式は準粒子の存在を仮定したときに分子場近似 (対凝縮があるときは特にペアリング近似という。) より得られるもので、粒子と正孔の確率振幅に関する連立微分方程式となっている。そのため渦糸を考えたとき求まる解は角運動量の固有状態となっている。また得られる確率振幅 u_n, v_n は BCS 理論におけるそれと同じ意味を持っており (当然のことであるが。) その点からも解釈がしやすいといえるだろう。渦糸が単独で存在するときの B-dG 方程式は Caroli、de Gennes、Matricon により低エネルギー状態に関して解析的に解かれている。[13] この方法で使われる近似の適応領域は準古典理論のそれと基本的に同じであるが、フェルミ波数のオーダーの振動をそのまま扱っており、束縛状態におけるエネルギーの量子性も導くことができる。

本研究では Gor'kov 方程式でなく B-dG 方程式を扱って議論する。過去に B-dG 方程式を数値的に解いて議論を行っている研究がいくつかあり、それを含めて vortex に関する過去の研究について述べることにする。

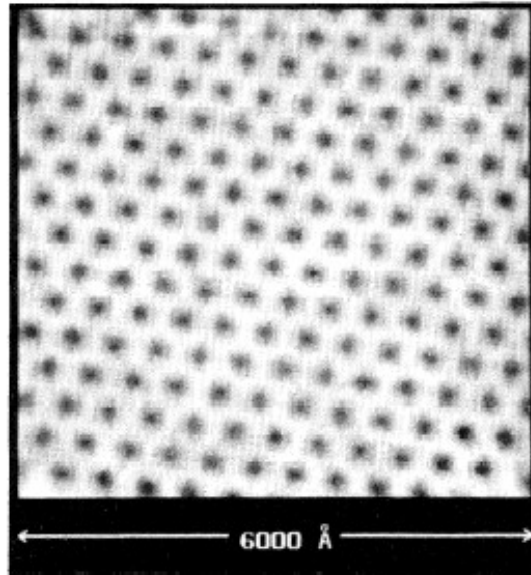


図 1.7: NbSe₂ 超伝導体における Abrikosov 格子 ([11] より)

1957 年 Abrikosov により第 2 種超伝導体における渦糸格子 (Abrikosov 格子という。) の理論が提案された後、1967 年に U.Essmann らによりそれが初めて観測される。当時の像は Bitter pattern としてしか得られなかったのだが 1988 年 Hess らが磁束格子の鮮やかな像の観測に成功する。[11] (図 1.7 参照。) これに

は走査型トンネル顕微鏡 (STM) が使われており、NbSe₂⁸に対するトンネル電流のコンダクタンス dI/dV の測定により像が得られた。 dI/dV はフェルミ面上の局所状態密度に比例する量であり、その場所における励起スペクトルの情報を与えてくれる。Hess らの測定結果は vortex の中心における dI/dV がゼロ・バイアスのときピーク（以後ゼロバイアスピークとよぶ。）を持つことを示唆していた。この観測の報告により vortex の電子状態に関する理論的研究が再び活発になった。ゼロバイアスピークの観測データは vortex を正常状態のドメインに置き換える単純なモデルでは説明できず、B-dG 方程式を解く方向で研究が進んでいった。Gygi らは円柱状の系の中心に vortex が一つ存在する場合について B-dG 方程式を数値的に解き、そこで得られた確率振幅から局所状態密度を計算した。[15] その結果が図 1.8 でありゼロバイアスピークの再現に成功している。また数値計算において Caroli らによって示唆されていた離散的な束縛状態が得られており、その低エネルギー状態へのトンネリングがゼロバイアスピークにつながることを説明した。

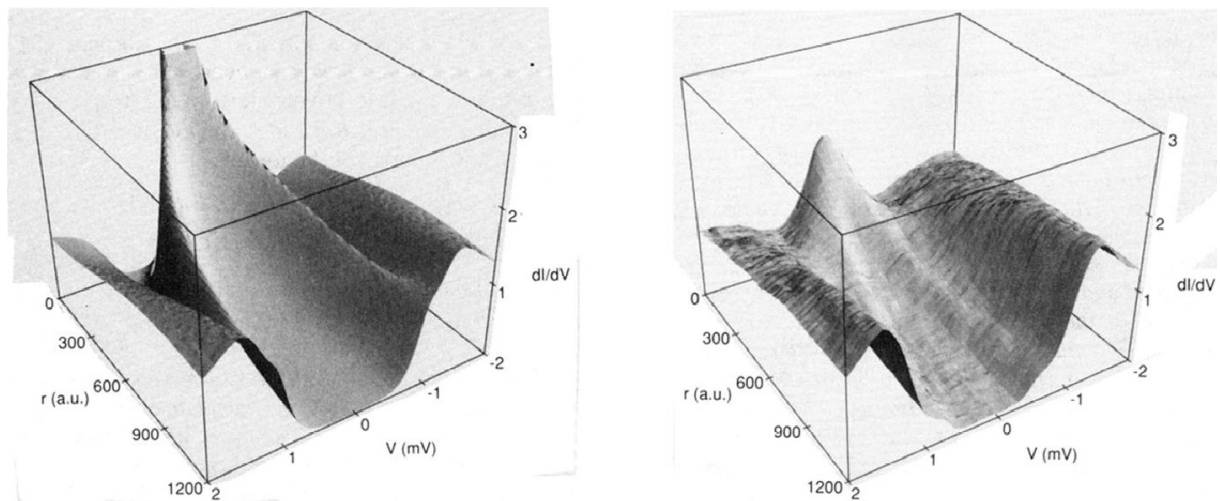


図 1.8: vortex が単独で存在する場合の局所状態密度 ([15] より)

左が数値計算の結果で右が実験結果である。数値計算の結果は Hess らにより観測されたゼロバイアスピークの再現に成功している。

B-dG 方程式の数値的解析はカイラル p 波を想定した場合についても行われている。例えば Matsumoto らは (1.7) 式の秩序パラメータで Bogoliubov-de Gennes 方程式を解き局所状態密度を求めている。[17] ここでもゼロバイアスピークを再現しており Caroli らによるモードも得られている。彼らはさらに偏光吸収における二色性について議論している。確率振幅は (1.7) 式の符号 ± に応じて異なる渦度 (winding) を持ち、二つの場合で吸収する光の偏り（右回りであるか左回りであるか）が違ってくる。このことは超伝導状態でのキャリアが粒子であるか正孔であるかにより偏光吸収が二色性を持つことを意味し、Matsumoto らにより Sr₂RuO₄ 超伝導の軌道依存性に関して興味深い議論がなされている。

カイラル p 波の vortex 状態に関しては他の点でも着目されている。その一つとして vortex 内での不純物効果が挙げられる。1999 年に G.E.Volovik は vortex 束縛状態のスペクトルにおける不純物の影響を準古典理論で解析している。[18] その中で彼は、S 波 vortex の場合は不純物が存在しない状況に比べスペクトルが変更を受けるのに対し、カイラル p 波 vortex の場合は変化がないことを示唆している。さらに 2000 年には Y.Kato により不純物散乱確率 Γ が導出されている。[19] それによると正常状態での値 Γ_n により規格

⁸現時点で異方的 S 波と考えられている。

化した散乱確率は次のように与えられる。

$$\Gamma/\Gamma_n = \begin{cases} c_1 \ln(\Delta_\infty/E) & , for \text{ S 波} \\ c_2 & , for \text{ カイラル p 波 positive vortex} \\ 0 & , for \text{ カイラル p 波 negative vortex} \end{cases} \quad (1.8)$$

ここで Δ_∞ は vortex から十分離れた場所におけるギャップ、 E は vortex 束縛状態の励起エネルギーである。また c_1, c_2 は $\mathcal{O}(1/\ln(\Delta_\infty/T))$ 程度の大きさの定数（エネルギーに関する）である。⁹(1.8) 式より S 波 vortex とカイラル p 波 positive vortex の場合はほぼ同じ大きさの値になり¹⁰negative vortex の場合には消失することがわかる。これに関し Kato は、negative vortex において仮想的に時間反転対称性が回復しゼロ磁場中の S 波と類似した状態が実現することを主張している。これから Anderson の定理を適用すると不純物散乱の影響がないことが直ちにいえることになる。不純物散乱確率の他に Kato は vortex を取り巻く電流の伝導度（flux flow conductivity）も算出しており、散乱確率と関連してカイラル p 波 negative vortex の場合には S 波に比べてずっと大きくなることを示している。

Y.Kato と N.Hayashi はこの結果に対しさらに議論を進めており、準古典理論とは少し異なる方法を用いて不純物散乱確率を解析している。[20] その中で散乱確率を局所状態密度と行列要素（コヒーレンス因子）の積として評価し、カイラル p 波 negative vortex の場合には行列要素がゼロになることを示した。positive vortex と negative vortex の場合を比べると局所状態密度は同じ値になっており、コヒーレンス因子が重要な量であることが主張されている。この論文において核磁気緩和率の導出も行われている。これは散乱確率の場合と同様のコヒーレンス因子を持つ量であり negative vortex において緩和率がゼロになることが導出されている。核磁気緩和率の準古典理論による導出は同著者により行われておりそれを本文の付録 A に記してある。

不純物散乱確率や核磁気緩和率において S 波 vortex とカイラル p 波 positive vortex と negative vortex の状況の違いを与えているものは結局クーパーペアと vortex の角運動量（あるいは渦度、カイラリティ）であるといえる。繰り返しになるが negative vortex の場合に散乱確率と緩和率が消失する過程において、クーパーペアの重心運動と相対運動の回転が互いに逆向きで全角運動量がゼロになるという事情が鍵になっているのである。

⁹但しこの評価は vortex の大きさが温度の低下に伴い小さくなること（Kramer-Pesch 効果）を考慮した場合のものである。詳しくは参考文献 [19] を参照。

¹⁰この点が Volovik の結果と異なるが、positive vortex の場合にスペクトルが不純物により影響を受けることは Matsumoto と Sigrist (2000 年) [16] や Miyazu (2002 年) [25] により指摘されている。

1.4 核磁気緩和率の理論的研究

1967年に R.Leadon と H.Suhl により vortex における核磁気緩和率を解析する試みがなされている。[24] 彼らは vortex が単独で存在する系に対し様々な近似を使って Gor'kov 方程式を解こうとした。その近似の基本的精神は、侵入長 λ が相関長 ξ よりも十分長くベクトルポテンシャルの空間変化が緩やかであるとして摂動展開を行うというものである。この方法は vortex の遠方に関してはよい評価となるがコア近傍に関してはそうではない。ここで求められた局所状態密度と核磁気緩和率を図 1.9、図 1.10 に示しておく。図 1.9 において R_T は vortex 中心からの距離を表す。局所状態密度の $r/\xi = 0$ のデータに関して述べると、確かにギャップ Δ_∞ の内側において有限の状態密度を算出することができているが 1.3 節で述べたゼロバイアスピークを再現できていない。このように R.Leadon らの計算では vortex 束縛状態¹¹が正確に考慮されておらず、核磁気緩和率 (図 1.10) に関しても vortex 近傍における結果の信憑性は低いといえる。但し遠方に関してはよく評価されており、Hebel と Slichter の結果とも一致する¹²。

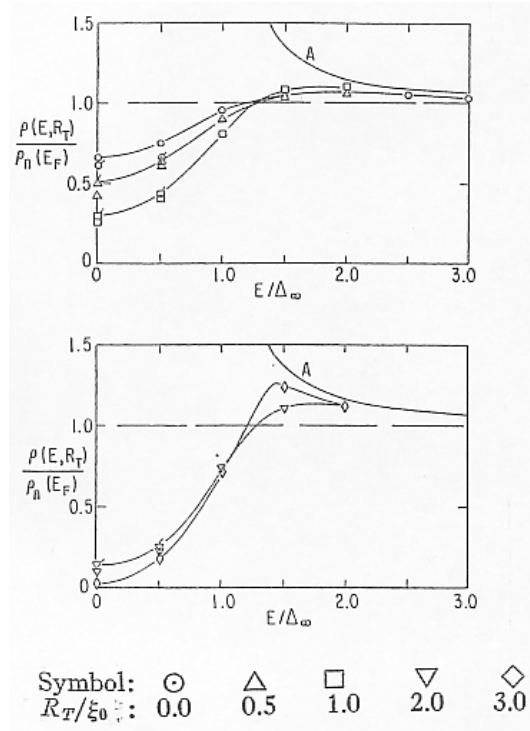


図 1.9: R.Leadon と H.Suhl による vortex における局所状態密度
各位置における局所状態密度のスペクトルが示されている。 $\rho_n(E_F)$ はフェルミ面における正常状態の状態密度を表す。

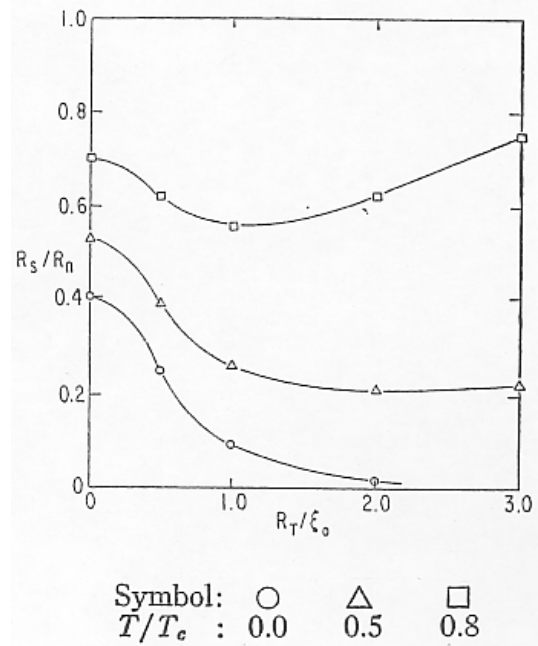


図 1.10: R.Leadon と H.Suhl による vortex における核磁気緩和率

R_s 、 R_n はそれぞれ超伝導状態と正常状態における核磁気緩和率を表す。各温度における緩和率の空間依存性が示されている。

近年 M.Takigawa らによって vortex における核磁気緩和率の理論的研究がなされている。[21] vortex が存在する系において核磁気共鳴 (NMR) の実験を行う場合、共鳴周波数が試料内の場所に応じて変化するため核磁気緩和率に局所的な意味を持たせることができる。¹³例えば試料内で最も磁場が侵入している場所は vortex の中心であり、共鳴を起こす電磁波のうち最大の周波数を持つもので緩和率を測定すれば vortex 中心での値を測定したことになる。このことから Takigawa らは核磁気緩和率の測定が vortex の構造を探る上でよいプローブになると述べている。彼らは vortex が格子以上に複数存在する場合の局所状態密度と核

¹¹ R_T に応じて異なる束縛状態が支配的になる。図 1.8 参照。

¹² Hebel と Slichter は空間的に一様な系における超伝導状態の核磁気緩和率を求めている。

¹³ 参考文献 [22] の p.187、あるいは [23] 参照。

磁気緩和率を B-dG 方程式の数値計算により求めた。S 波、d 波、カイラル p 波に対して結果が得られている。彼らは格子の方向に応じて相互作用のカップリングを調節しフェルミ面に異方性を持たせて計算した。また Δ_{∞}/E_F は 0.01 ~ 0.1 程度にとられており vortex 束縛状態のエネルギー量子性が大きく物理に影響を与える結果となった。¹⁴Takigawa らにより得られたカイラル p 波に対する核磁気緩和率の結果を図 1.12 に示す。記号 A~V は図 1.11 に示されたサイトを表す。極低温でない限り核磁気緩和率は vortex 近傍で大きくなることわかる。

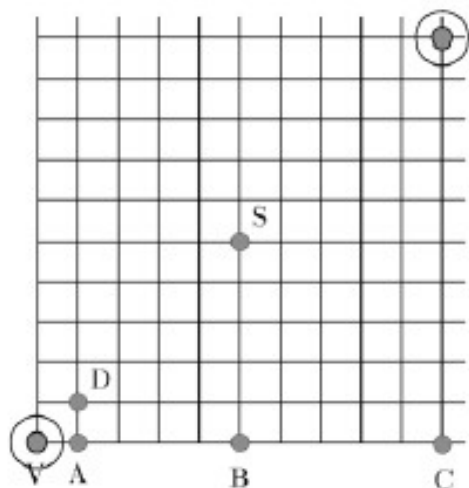


図 1.11: 格子上的サイト A~V の座標
⊙ は vortex を表す。[21] より

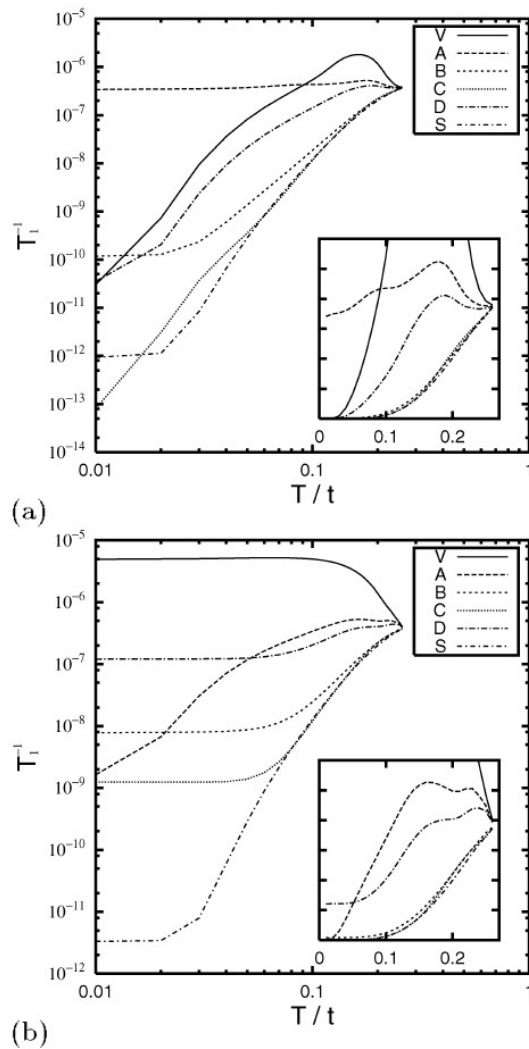


図 1.12: カイラル p 波 vortex における各サイト上での核磁気緩和率

(a) が positive vortex の場合、(b) が negative vortex の場合を表す。log-log プロットでかかれている。挿入図は軸の目盛りを等間隔にして描かれたもの。

¹⁴例えば S 波のスペクトルにはギャップ Δ_{∞} の内側に束縛状態によるピークが存在し、それに伴い核磁気緩和率の温度依存性において指数関数的な減衰が現れる。但し Sr_2RuO_4 においては Δ_{∞}/E_F は 0.001 程度であり量子性の効果は小さいと思われる。

図 1.12 より positive vortex と negative vortex の場合でサイト V、A (vortex 中心とその隣接サイト) での核磁気緩和率をまとめて比較すると値のオーダーとしてほとんど変わらないことがいえる。これは前節で述べた準古典理論の結果と矛盾している。準古典理論によるとカイラル p 波での核磁気緩和率は positive vortex と negative vortex で大きく異なり、negative vortex の場合温度や場所に寄らずゼロになる結果が得られている。この矛盾の原因としては Takigawa らの計算において

- 格子の影響¹⁵
- フェルミ面の異方性
- 束縛状態の量子性

を考慮していることが可能性として考えられる。準古典理論は $\Delta_\infty/E_F \ll 1$ において正当化される理論であり基本的に励起スペクトルを連続なものとして扱うことになる。したがって束縛状態の量子性は取り入れられてない。また 1 粒子に関する束縛状態 (準古典理論の描像では Andreev 束縛状態と呼ばれる。) の波数は一律に k_F (定数) とおかれておりフェルミ面の異方性は考慮されていない。

1.5 研究目的

本研究では Caroli らによって行われた B-dG 方程式の解法を S 波 vortex、カイラル p 波 vortex に適用し、渦糸状態における核磁気緩和率を解析的に導出する。Matsumoto らの研究、準古典理論での不純物散乱確率や核磁気緩和率の議論のようにカイラル p 波では興味深い物理現象が预期される。そしてそこには vortex 内のカイラリティーが深く関わっている。本研究の動機となる歴史的背景としては前節で説明した核磁気緩和率における準古典理論の結果 (Y.Kato) と数値計算の結果 (M.Takigawa ら) の矛盾がある。その矛盾を検証することを念頭におき、B-dG 方程式の解析を出発点とする。B-dG 方程式は準古典理論に比べ物理解釈が行いやすいだけでなく、励起スペクトルの量子性を考慮できるという利点もある。したがって矛盾の原因の候補としてあげた量子性の効果について言及できるものと考えている。Caroli らの方法により B-dG 方程式の解を求め核磁気緩和率を計算し、準古典理論と Takigawa らの結果について比較検討を行いたい。

¹⁵ 前節の説明で明示しなかったが Kato らの計算は vortex が独立に存在する場合について解かれたものである。

第2章 B-dG 方程式

2.1 B-dG 方程式の導出

S 波、p 波によらずペアリング近似をした時のハミルトニアンは次のようにかける。

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{int} \\ \mathcal{H}_0 &= \sum_{\alpha} \int d\mathbf{r} \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) h_0 \psi_{\alpha}(\mathbf{r}), \quad h_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F, \\ \mathcal{H}_{int} &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \left\{ \psi_{\alpha}^{\dagger}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}') \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \Delta_{\alpha\beta}^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) \psi_{\beta}(\mathbf{r}') \right\}\end{aligned}\tag{2.1}$$

これより¹

$$[\psi_{\alpha}(\mathbf{r}), \mathcal{H}] = h_0 \psi_{\alpha}(\mathbf{r}) + \sum_{\beta} \int d\mathbf{r}' \Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \psi_{\beta}^{\dagger}(\mathbf{r}')\tag{2.2}$$

以下で S 波、カイラル p 波の場合にわけて (2.2) 式に対する議論を進めていく。

(a)、S 波の場合

S 波においてギャップ関数 $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は次のようにかける。²

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -i\sigma_{\alpha\beta}^y \Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \Delta(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2, \mathbf{R} - \mathbf{r}/2) \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Delta(\mathbf{R}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Delta(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \\ &= \delta(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{R}) = \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \Delta\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right)\end{aligned}\tag{2.4}$$

ただし

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2\tag{2.5}$$

また $\Delta(\mathbf{R}, \mathbf{k})$ は $\Delta(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ を $\mathbf{r}$ に関してフーリエ変換したものである。

これより

$$\begin{aligned}[\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}), \mathcal{H}] &= h_0 \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) + \int d\mathbf{r}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \Delta\left(\frac{\mathbf{r} + \mathbf{r}'}{2}\right) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') \\ &= h_0 \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r})\end{aligned}\tag{2.6}$$

¹ここではしっかりと議論しないが、(2.2) 式の導出において $\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\Delta_{\beta\alpha}(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ (場の演算子の反交換性に由来する。) を用いていることを注意しておく。

²1.2 節で説明したように $\Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Delta(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ が成立する。

ここで S 波に対する B-dG 変換として

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) & -v_n^*(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) & u_n^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{n\uparrow} \\ \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

を定義する。ただしハミルトミアンは

$$\mathcal{H} = \sum_{n,\alpha} E_n \gamma_{n\alpha}^{\dagger} \gamma_{n\alpha} + E_g \quad (2.8)$$

とかけるものとする。

(2.8) 式より

$$[\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}), \mathcal{H}] = \sum_n E_n \{ u_n(\mathbf{r}) \gamma_{n\uparrow} + v_n^*(\mathbf{r}) \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} \} \quad (2.9)$$

また (2.6) 式より

$$[\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}), \mathcal{H}] = \sum_n \left[\gamma_{n\uparrow} \left(h_0 u_n(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}) \right) + \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} \left(-h_0 v_n^*(\mathbf{r}) + \Delta(\mathbf{r}) u_n^*(\mathbf{r}) \right) \right] \quad (2.10)$$

以上より (2.9)、(2.10) 式における $\gamma_{n\uparrow}$, $\gamma_{n\downarrow}^{\dagger}$ の係数を比較して

$$\begin{pmatrix} h_0 & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

を得る。これが S 波における B-dG 方程式である。

(b)、p 波の場合

カイラル p 波においてギャップ関数 $\Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ は次のようにかける。³

$$\Delta_{\alpha\beta}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \sigma_{\alpha\beta}^x \Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \Delta(\mathbf{R} + \mathbf{r}/2, \mathbf{R} - \mathbf{r}/2) \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Delta(\mathbf{R}, \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \\ &= \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Delta(\mathbf{R}) (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

ただし

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 \quad (2.14)$$

また $\Delta(\mathbf{R}, \mathbf{k})$ は $\Delta(\mathbf{R}, \mathbf{r})$ を $\mathbf{r}$ に関してフーリエ変換したものである。

³1.2 節で説明したように $\Delta_{\uparrow\downarrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \Delta_{\downarrow\uparrow}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, $\Delta(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\Delta(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ が成立する。

これより (2.2) 式第 2 項に関して

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{r}_2 \Delta(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_2) \\
&= \int d\mathbf{r}_2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Delta(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_2) \\
&= \int d\mathbf{r}_2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Delta\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} (\hat{k}_x + i\hat{k}_y) \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_2) \\
&\simeq \int d\mathbf{r}_2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \Delta\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right) \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_2) \left[\frac{i}{k_F} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \right] \\
&= \int d\mathbf{r}_2 \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^2} \left[\frac{i}{k_F} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \left(\Delta\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right) \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_2) \right) \right] e^{i\mathbf{k}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \\
&= \int d\mathbf{r}_2 \frac{i}{k_F} \left\{ \Delta\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_2} + i \frac{\partial}{\partial y_2} \right) \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_2) \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial(\frac{x_1+x_2}{2})} + i \frac{\partial}{\partial(\frac{y_1+y_2}{2})} \right) \Delta\left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}\right) \right] \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_2) \right\} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \\
&= \frac{i}{k_F} \left\{ \Delta(\mathbf{r}_1) \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_1) \right] + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} + i \frac{\partial}{\partial y_1} \right) \Delta(\mathbf{r}_1) \right] \psi_\alpha^\dagger(\mathbf{r}_1) \right\} \quad (2.15)
\end{aligned}$$

(2.2)、(2.15) 式より

$$[\psi_\uparrow(\mathbf{r}), \mathcal{H}] = h_0 \psi_\uparrow(\mathbf{r}) + \frac{i}{k_F} \left\{ \Delta(\mathbf{r}) \square^+ + \frac{1}{2} [\square^+ \Delta(\mathbf{r})] \right\} \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \quad (2.16)$$

$$\square^+ = \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} = e^{i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

ここでカイラル p 波に対する B-dG 変換として

$$\begin{pmatrix} \psi_\uparrow(\mathbf{r}) \\ \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) & -v_n^*(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) & -u_n^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{n\uparrow} \\ \gamma_{n\downarrow}^\dagger \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

を定義する。ただしハミルトミアンは

$$\mathcal{H} = \sum_{n,\alpha} E_n \gamma_{n\alpha}^\dagger \gamma_{n\alpha} + E_g \quad (2.18)$$

とかけるものとする。

(2.18) 式より

$$[\psi_\uparrow(\mathbf{r}), \mathcal{H}] = \sum_n E_n \{ u_n(\mathbf{r}) \gamma_{n\uparrow} + v_n^*(\mathbf{r}) \gamma_{n\downarrow}^\dagger \} \quad (2.19)$$

また (2.16) 式より

$$\begin{aligned}
[\psi_\uparrow(\mathbf{r}), \mathcal{H}] &= \sum_n \left[\gamma_{n\uparrow} \left(h_0 u_n(\mathbf{r}) - i \{ \Delta(\mathbf{r}) \square^+ + \frac{1}{2} \square^+ \Delta(\mathbf{r}) \} v_n(\mathbf{r}) \right) \right. \\
&\quad \left. + \gamma_{n\downarrow}^\dagger \left(-h_0 v_n^*(\mathbf{r}) + i \{ \Delta(\mathbf{r}) \square^+ + \frac{1}{2} \square^+ \Delta(\mathbf{r}) \} u_n^*(\mathbf{r}) \right) \right] \quad (2.20)
\end{aligned}$$

以上より、(2.19)、(2.20) 式における $\gamma_{n\uparrow}$, $\gamma_{n\downarrow}^\dagger$ の係数を比較して

$$\begin{pmatrix} h_0 & -\frac{i}{k_F} \{ \Delta(\mathbf{r}) \square^+ + \frac{1}{2} [\square^+ \Delta(\mathbf{r})] \} \\ -\frac{i}{k_F} \{ \Delta^*(\mathbf{r}) \square^- + \frac{1}{2} [\square^- \Delta^*(\mathbf{r})] \} & -h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

を得る。これがカイラル p 波における B-dG 方程式である。

2.2 確率振幅 u_n 、 v_n に対する規格直交性

S 波, カイラル p 波における B-dG 変換を記すと

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) & -v_n^*(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) & \pm u_n^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{n\uparrow} \\ \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

ここで + の符号は S 波の, - の符号はカイラル p 波の表式になっている。

以下、複号を用いる時, 上側を S 波に, 下側をカイラル p 波に対応させることにする。

次のような直交性を仮定する。(これについては後述する。)

$$\int d\mathbf{r} (u_{n'}^*(\mathbf{r}), v_{n'}^*(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \delta_{n,n'} C_n \quad (2.23)$$

$$\int d\mathbf{r} (v_{n'}(\mathbf{r}), u_{n'}(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ \mp v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0 \quad (2.24)$$

これより

(2.22) 式の両辺に対し $\int d\mathbf{r} (u_{n'}^*(\mathbf{r}), v_{n'}^*(\mathbf{r})) \cdot$ を作用させると

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r} (u_{n'}^*(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) + v_{n'}^*(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r})) \\ &= \sum_n \left[\begin{array}{c} \int d\mathbf{r} (u_{n'}^*(\mathbf{r}), v_{n'}^*(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \\ \int d\mathbf{r} (u_{n'}^*(\mathbf{r}), v_{n'}^*(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} -v_n^*(\mathbf{r}) \\ \pm u_n^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \end{array} \right]^t \begin{pmatrix} \gamma_{n\uparrow} \\ \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} \\ &= (C_{n'}, 0) \begin{pmatrix} \gamma_{n'\uparrow} \\ \gamma_{n'\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} \\ &= C_{n'} \gamma_{n'\uparrow} \end{aligned} \quad (2.25)$$

また、 $\int d\mathbf{r} (v_{n'}(\mathbf{r}), \mp u_{n'}(\mathbf{r})) \cdot$ を作用させると

$$\begin{aligned} & \int d\mathbf{r} (v_{n'}(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \mp u_{n'}(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r})) \\ &= \sum_n \left[\begin{array}{c} \int d\mathbf{r} (v_{n'}(\mathbf{r}), \mp u_{n'}(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \\ \int d\mathbf{r} (v_{n'}(\mathbf{r}), \mp u_{n'}(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} -v_n^*(\mathbf{r}) \\ \pm u_n^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \end{array} \right]^t \begin{pmatrix} \gamma_{n\uparrow} \\ \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} \\ &= (0, -C_{n'}) \begin{pmatrix} \gamma_{n'\uparrow} \\ \gamma_{n'\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} \\ &= -C_{n'} \gamma_{n'\downarrow}^{\dagger} \end{aligned} \quad (2.26)$$

(2.25)、(2.26) 式より

$$\gamma_{n\uparrow} = \frac{1}{C_n} \int d\mathbf{r} (u_n^*(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) + v_n^*(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r})) \quad (2.27)$$

$$\gamma_{n\downarrow}^{\dagger} = -\frac{1}{C_n} \int d\mathbf{r} (v_n(\mathbf{r})\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \mp u_n(\mathbf{r})\psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r})) \quad (2.28)$$

ここで

$$\{\gamma_{n\uparrow}, \gamma_{n\uparrow}^{\dagger}\} = 1 \quad (2.29)$$

が成立するので

$$\begin{aligned}
1 &= \frac{1}{C_n^2} \int d\mathbf{r} d\mathbf{r}' \left[u_n^*(\mathbf{r}) u_n(\mathbf{r}') \{ \psi_\uparrow(\mathbf{r}), \psi_\uparrow^\dagger(\mathbf{r}') \} + v_n^*(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}') \{ \psi_\downarrow^\dagger(\mathbf{r}), \psi_\downarrow(\mathbf{r}') \} \right] \\
&= \frac{1}{C_n^2} \int d\mathbf{r} (u_n^*(\mathbf{r}) u_n(\mathbf{r}) + v_n^*(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r})) \\
&= \frac{1}{C_n}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

以上より

$u_n(\mathbf{r}), v_n(\mathbf{r})$ に対する規格化条件として

$$\begin{aligned}
1 &= C_n \\
&= \int d\mathbf{r} (|u_n(\mathbf{r})|^2 + |v_n(\mathbf{r})|^2)
\end{aligned} \tag{2.31}$$

を得る。

次に (2.23)、(2.24) 式の直交性の証明をおこなう。これは S 波、カイラル p 波 2 つの場合において類似したものになるので、多少複雑になっているカイラル p 波についてのみ説明する。

$\frac{i}{k_F} \{ \Delta(\mathbf{r}) \square^+ + \frac{1}{2} [\square^+ \Delta(\mathbf{r})] \} \equiv \hat{a}$ とすると、カイラル p 波に対する B-dG 方程式は

$$\begin{pmatrix} h_0 & -\hat{a} \\ \hat{a}^* & -h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \tag{2.32}$$

とかける。これより

$$\begin{aligned}
h_0 u_n(\mathbf{r}) - \hat{a} v_n(\mathbf{r}) &= E_n u_n(\mathbf{r}) \\
\hat{a}^* u_n(\mathbf{r}) - h_0 v_n(\mathbf{r}) &= E_n v_n(\mathbf{r}) \\
h_0 u_n^*(\mathbf{r}) - \hat{a}^* v_n^*(\mathbf{r}) &= E_n u_n^*(\mathbf{r}) \\
\hat{a} u_n^*(\mathbf{r}) - h_0 v_n^*(\mathbf{r}) &= E_n v_n^*(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{2.33}$$

ここで $f(\mathbf{r}), g(\mathbf{r})$ を任意の関数として次のことが成立する。

$$\begin{aligned}
&\int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) [\hat{a} g(\mathbf{r})] \\
&= \frac{i}{k_F} \left\{ \int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) \Delta(\mathbf{r}) [\square^+ g(\mathbf{r})] + \int d\mathbf{r} \frac{1}{2} [\square^+ \Delta(\mathbf{r})] f(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) \right\} \\
&= \frac{i}{k_F} \left\{ - \int d\mathbf{r} \left([\square^+ f(\mathbf{r})] \Delta(\mathbf{r}) + f(\mathbf{r}) [\square^+ \Delta(\mathbf{r})] \right) g(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d\mathbf{r} [\square^+ \Delta(\mathbf{r})] f(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) \right\} \\
&= -\frac{i}{k_F} \left\{ \int d\mathbf{r} \left\{ \Delta(\mathbf{r}) [\square^+ f(\mathbf{r})] + \frac{1}{2} [\square^+ \Delta(\mathbf{r})] f(\mathbf{r}) \right\} g(\mathbf{r}) \right\} \\
&= \int d\mathbf{r} [-\hat{a} f(\mathbf{r})] g(\mathbf{r})
\end{aligned} \tag{2.34}$$

同様にして

$$\int d\mathbf{r} f(\mathbf{r}) [\hat{a}^* g(\mathbf{r})] = \int d\mathbf{r} [-\hat{a}^* f(\mathbf{r})] g(\mathbf{r}) \tag{2.35}$$

これより⁴

$$\begin{aligned}
& \int d\mathbf{r} (f(\mathbf{r}), g(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} h_0 & -\hat{a} \\ \hat{a}^* & -h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \\
&= \int d\mathbf{r} \left[\begin{pmatrix} h_0 & 0 \\ 0 & -h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\mathbf{r}) \\ g(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \\
&\quad + \int d\mathbf{r} \left[\begin{pmatrix} 0 & -\hat{a}^* \\ \hat{a} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(\mathbf{r}) \\ g(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \right]^t \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \\
&= \int d\mathbf{r} \begin{pmatrix} h_0 f(\mathbf{r}) - \hat{a}^* g(\mathbf{r}) \\ \hat{a} f(\mathbf{r}) - h_0 g(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

一方、(2.32) 式より

$$= E_n \int d\mathbf{r} (f(\mathbf{r}), g(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

(2.36) 式において $(f(\mathbf{r}), g(\mathbf{r})) = (u_{n'}^*(\mathbf{r}), v_{n'}^*(\mathbf{r}))$ とすると

$$\int d\mathbf{r} \begin{pmatrix} h_0 u_{n'}^*(\mathbf{r}) - \hat{a}^* v_{n'}^*(\mathbf{r}) \\ \hat{a} u_{n'}^*(\mathbf{r}) - h_0 v_{n'}^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_{n'} \int d\mathbf{r} (u_{n'}^*(\mathbf{r}), v_{n'}^*(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

よって

$$(E_n - E_{n'}) \int d\mathbf{r} (u_{n'}^*(\mathbf{r}), v_{n'}^*(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0 \tag{2.39}$$

$$\int d\mathbf{r} (u_{n'}^*(\mathbf{r}), v_{n'}^*(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = 0 \tag{2.40}$$

for $n \neq n'$

また

(2.36) 式において $(f(\mathbf{r}), g(\mathbf{r})) = (v_{n'}(\mathbf{r}), u_{n'}(\mathbf{r}))$ とすると

$$\int d\mathbf{r} \begin{pmatrix} h_0 v_{n'}(\mathbf{r}) - \hat{a}^* u_{n'}(\mathbf{r}) \\ \hat{a} v_{n'}(\mathbf{r}) - h_0 u_{n'}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = -E_{n'} \int d\mathbf{r} (v_{n'}(\mathbf{r}), u_{n'}(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \tag{2.41}$$

よって

$$\begin{aligned}
(E_n + E_{n'}) \int d\mathbf{r} (v_{n'}(\mathbf{r}), u_{n'}(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} &= 0 \\
\int d\mathbf{r} (v_{n'}(\mathbf{r}), u_{n'}(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} &= 0
\end{aligned} \tag{2.42}$$

以上よりカイラル p 波における直交性

$$\begin{aligned}
\int d\mathbf{r} (u_{n'}^*(\mathbf{r}), v_{n'}^*(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} &= \delta_{n,n'} C_n \\
\int d\mathbf{r} (v_{n'}(\mathbf{r}), u_{n'}(\mathbf{r})) \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} &= 0
\end{aligned}$$

がいえたことになる。

⁴ h_0 の項に関しても (2.34) 式と同様に部分積分をして考える。

2.3 確率振幅 u_n 、 v_n を用いた Green 関数の表式

Green 関数は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &\equiv -\langle T \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}', \tau') \rangle \\ F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &\equiv \langle T \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\downarrow}(\mathbf{r}', \tau') \rangle \end{aligned} \quad (2.43)$$

まず S 波の場合を考える。このとき B-dG 変換は

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) & -v_n^*(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) & u_n^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{n\uparrow} \\ \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

と与えられる。

$\tau > \tau'$ として考えると

$$\begin{aligned} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\langle \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, \tau) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}', \tau') \rangle \\ &= -\frac{1}{Z} \sum_m e^{-\beta E_m} \langle m | e^{\mathcal{H}\tau} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) e^{-\mathcal{H}\tau} \cdot e^{\mathcal{H}\tau'} \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') e^{-\mathcal{H}\tau'} | m \rangle \\ &= -\frac{1}{Z} \sum_{m,l} e^{-\beta E_m} e^{E_m\tau} \langle m | \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) | l \rangle e^{-E_l\tau} e^{E_l\tau'} \langle l | \psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}') | m \rangle e^{-E_m\tau'} \\ &= -\frac{1}{Z} \sum_{m,l} e^{-\beta E_m} e^{E_m\tau} \langle m | \sum_n (u_n(\mathbf{r}) \gamma_{n\uparrow} - v_n^*(\mathbf{r}) \gamma_{n\downarrow}^{\dagger}) | l \rangle e^{-E_l\tau} \\ &\quad \times e^{E_l\tau'} \langle l | \sum_{n'} (u_{n'}^*(\mathbf{r}') \gamma_{n'\uparrow}^{\dagger} - v_{n'}(\mathbf{r}') \gamma_{n'\downarrow}) | m \rangle e^{-E_m\tau'} \\ &= -\frac{1}{Z} \sum_{m,l} e^{-\beta E_m} e^{(E_m - E_l)(\tau - \tau')} \\ &\quad \times \sum_n \langle m | (u_n(\mathbf{r}) \gamma_{n\uparrow} - v_n^*(\mathbf{r}) \gamma_{n\downarrow}^{\dagger}) | l \rangle \sum_{n'} \langle l | (u_{n'}^*(\mathbf{r}') \gamma_{n'\uparrow}^{\dagger} - v_{n'}(\mathbf{r}') \gamma_{n'\downarrow}) | m \rangle \end{aligned} \quad (2.45)$$

ここで

$$\mathcal{H} |m\rangle = E_m |m\rangle, \quad Z = \sum_m e^{-\beta E_m} \quad (2.46)$$

とした。

(2.45) 式の行列要素においてゼロにならない部分を考えて

$$\begin{aligned} &\sum_n \langle m | (u_n(\mathbf{r}) \gamma_{n\uparrow} - v_n^*(\mathbf{r}) \gamma_{n\downarrow}^{\dagger}) | l \rangle \sum_{n'} \langle l | (u_{n'}^*(\mathbf{r}') \gamma_{n'\uparrow}^{\dagger} - v_{n'}(\mathbf{r}') \gamma_{n'\downarrow}) | m \rangle \\ &= \sum_n \left[\langle m | u_n(\mathbf{r}) \gamma_{n\uparrow} | l \rangle \langle l | u_n^*(\mathbf{r}') \gamma_{n\uparrow}^{\dagger} | m \rangle + \langle m | v_n^*(\mathbf{r}) \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} | l \rangle \langle l | v_n(\mathbf{r}') \gamma_{n\downarrow} | m \rangle \right] \end{aligned} \quad (2.47)$$

さらに (2.47) 式でゼロにならないのは第 1 項において $|l\rangle = \gamma_{n\uparrow}^{\dagger} |m\rangle$ 、第 2 項において $|l\rangle = \gamma_{n\downarrow} |m\rangle$ の要素のみである。⁵

⁵ これは $|m\rangle$ における状態 $\{n, \uparrow\}$ (あるいは状態 $\{n, \downarrow\}$) の占有状況に関わらず成立することである。

これより状態 $\{n, \uparrow\}, \{n, \downarrow\}$ のエネルギー準位を ϵ_n として ($|0\rangle$ を基底状態とする
と $[\mathcal{H}, \gamma_{n\alpha}^\dagger]|0\rangle = \epsilon_n \gamma_{n,\alpha}^\dagger|0\rangle$)

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\frac{1}{Z} \sum_n \left(\sum_m e^{-\beta E_m} e^{-\epsilon_n(\tau-\tau')} u_n(\mathbf{r}) u_n^*(\mathbf{r}') \langle m | \gamma_{n\uparrow} \gamma_{n\uparrow}^\dagger | m \rangle \langle m | \gamma_{n\uparrow} \gamma_{n\uparrow}^\dagger | m \rangle \right. \\
&\quad \left. + \sum_m e^{-\beta E_m} e^{\epsilon_n(\tau-\tau')} v_n^*(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}') \langle m | \gamma_{n\downarrow}^\dagger \gamma_{n\downarrow} | m \rangle \langle m | \gamma_{n\downarrow}^\dagger \gamma_{n\downarrow} | m \rangle \right) \\
&= -\sum_n \left(u_n(\mathbf{r}) u_n^*(\mathbf{r}') e^{-\epsilon_n(\tau-\tau')} \frac{1}{Z} \sum_m e^{-\beta E_m} \langle m | \gamma_{n\uparrow} \gamma_{n\uparrow}^\dagger | m \rangle \right. \\
&\quad \left. + v_n^*(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}') e^{\epsilon_n(\tau-\tau')} \frac{1}{Z} \sum_m e^{-\beta E_m} \langle m | \gamma_{n\downarrow}^\dagger \gamma_{n\downarrow} | m \rangle \right) \\
&= -\sum_n \left(u_n(\mathbf{r}) u_n^*(\mathbf{r}') e^{-\epsilon_n(\tau-\tau')} \langle \gamma_{n\uparrow} \gamma_{n\uparrow}^\dagger \rangle + v_n^*(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}') e^{\epsilon_n(\tau-\tau')} \langle \gamma_{n\downarrow}^\dagger \gamma_{n\downarrow} \rangle \right) \\
&= -\sum_n \left(u_n(\mathbf{r}) u_n^*(\mathbf{r}') e^{-\epsilon_n(\tau-\tau')} (1 - f(\epsilon_n)) + v_n^*(\mathbf{r}) v_n(\mathbf{r}') e^{\epsilon_n(\tau-\tau')} f(\epsilon_n) \right)
\end{aligned} \tag{2.48}$$

となる。⁶

同様にして⁷

$\tau > \tau'$ において

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= -\frac{1}{Z} \sum_{m,l} e^{-\beta E_m} e^{(E_m - E_l)(\tau - \tau')} \\
&\quad \times \sum_n \langle m | (u_n(\mathbf{r}) \gamma_{n\uparrow} - v_n^*(\mathbf{r}) \gamma_{n\downarrow}^\dagger) | l \rangle \sum_{n'} \langle l | (v_{n'}^*(\mathbf{r}') \gamma_{n'\uparrow}^\dagger - u_{n'}(\mathbf{r}') \gamma_{n'\downarrow}) | m \rangle \\
&= \sum_n \left(u_n(\mathbf{r}) v_n^*(\mathbf{r}') e^{-\epsilon_n(\tau-\tau')} (1 - f(\epsilon_n)) - v_n^*(\mathbf{r}) u_n(\mathbf{r}') e^{\epsilon_n(\tau-\tau')} f(\epsilon_n) \right)
\end{aligned} \tag{2.49}$$

さらに τ に関してフーリエ変換を行い、松原周波数 $\omega_n = \frac{2n+1}{\beta} \pi$ を用いて表すと

$$\begin{aligned}
G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', i\omega_n) &\equiv \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \\
&= -\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \sum_l \left(u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}') e^{-\epsilon_l \tau} (1 - f(\epsilon_l)) + v_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}') e^{\epsilon_l \tau} f(\epsilon_l) \right) \\
&= -\sum_l \left[u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}') (1 - f(\epsilon_l)) \frac{-e^{-\epsilon_l \beta} - 1}{i\omega_n - \epsilon_l} + v_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}') f(\epsilon_l) \frac{-e^{\epsilon_l \beta} - 1}{i\omega_n + \epsilon_l} \right] \\
&= \sum_l \left[\frac{u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}')}{i\omega_n - \epsilon_l} + \frac{v_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}')}{i\omega_n + \epsilon_l} \right]
\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}
F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', i\omega_n) &\equiv \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \tau) \\
&= \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \sum_l \left(u_l(\mathbf{r}) v_l^*(\mathbf{r}') e^{-\epsilon_l \tau} (1 - f(\epsilon_l)) - v_l^*(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}') e^{\epsilon_l \tau} f(\epsilon_l) \right) \\
&= \sum_l \left[-\frac{u_l(\mathbf{r}) v_l^*(\mathbf{r}')}{i\omega_n - \epsilon_l} + \frac{v_l^*(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}')}{i\omega_n + \epsilon_l} \right]
\end{aligned} \tag{2.51}$$

を得る。⁸

⁶ $\langle m | \gamma_{n\uparrow} \gamma_{n\uparrow}^\dagger | m \rangle$ の値は 0 か 1 であることを用いた。

⁷ (2.48) 式の結果に対し -1 をかけ、 $u_{n'}^*(\mathbf{r}') \rightarrow v_{n'}^*(\mathbf{r}')$, $-v_{n'}(\mathbf{r}') \rightarrow u_{n'}(\mathbf{r}')$ とすればよい。

⁸ この表式より $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = F(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ が成立していることがわかる。(2.49) 式は $\tau > \tau'$ の場合のみ使える表式であることに注意。

次にカイラル p 波の場合を考える。
このとき B-dG 変換は

$$\begin{pmatrix} \psi_{\uparrow}(\mathbf{r}) \\ \psi_{\downarrow}^{\dagger}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \sum_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) - v_n^*(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) - u_n^*(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_{n\uparrow} \\ \gamma_{n\downarrow}^{\dagger} \end{pmatrix} \quad (2.52)$$

と与えられる。

(2.44) 式、(2.52) 式との比較から S 波の結果に対し $u_n^*(\mathbf{r}') \rightarrow -u_n^*(\mathbf{r}')$ とすればよく (2.50) 式、(2.51) 式より

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', i\omega_n) = \sum_l \left[\frac{u_l(\mathbf{r})u_l^*(\mathbf{r}')}{i\omega_n - \epsilon_l} + \frac{v_l^*(\mathbf{r})v_l(\mathbf{r}')}{i\omega_n + \epsilon_l} \right] \quad (2.53)$$

$$F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', i\omega_n) = \sum_l \left[-\frac{u_l(\mathbf{r})v_l^*(\mathbf{r}')}{i\omega_n - \epsilon_l} - \frac{v_l^*(\mathbf{r})u_l(\mathbf{r}')}{i\omega_n + \epsilon_l} \right] \quad (2.54)$$

を得る。⁹

以上の結果をまとめると

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', i\omega_n) &= \sum_l \left[\frac{u_l(\mathbf{r})u_l^*(\mathbf{r}')}{i\omega_n - \epsilon_l} + \frac{v_l^*(\mathbf{r})v_l(\mathbf{r}')}{i\omega_n + \epsilon_l} \right] \\ F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', i\omega_n) &= \sum_l \left[-\frac{u_l(\mathbf{r})v_l^*(\mathbf{r}')}{i\omega_n - \epsilon_l} \pm \frac{v_l^*(\mathbf{r})u_l(\mathbf{r}')}{i\omega_n + \epsilon_l} \right] \\ &\quad + \dots \text{ for } s \text{ wave} \\ &\quad - \dots \text{ for chiral } p \text{ wave} \end{aligned} \quad (2.55)$$

となる。

⁹この表式より $F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -F(\mathbf{x}', \mathbf{x})$ が成立していることがわかる。

2.4 B-dG 方程式の解

2.4.1 S 波 vortex の場合

S 波 vortex に対する B-d G 方程式は

$$\begin{pmatrix} h_0 & \Delta(\mathbf{r}) \\ \Delta^*(\mathbf{r}) & -h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (2.56)$$

ここで

$$h_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - E_F = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} \quad (2.57)$$

$$\Delta(\mathbf{r}) = \Delta(r) e^{i\theta} \quad (2.58)$$

次のような解を考える。

$$\begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{in\theta} u_n(r) \\ e^{i(n-1)\theta} v_n(r) \end{pmatrix} \quad (2.59)$$

これを (2.56) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_F^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] u_n(r) - \frac{2m}{\hbar^2} \Delta(r) v_n(r) &= -\frac{2mE_n}{\hbar^2} u_n(r) \\ \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_F^2 - \frac{(n-1)^2}{r^2} \right) \right] v_n(r) + \frac{2m}{\hbar^2} \Delta(r) u_n(r) &= \frac{2mE_n}{\hbar^2} v_n(r) \end{aligned} \quad (2.60)$$

以下では低エネルギー励起状態に対する解を求めることにし $|n| \ll k_F \xi$ としておく。

次のように距離 r_c を定義する。

$$|n| k_F \ll r_c \ll \xi \quad (2.61)$$

まず $r \ll r_c$ と $r \gg r_c$ においてそれぞれ解き、二つの解を $r \sim r_c$ の領域で漸近的に一致させることで (2.60) 式の解を求めていく。

(a)、 $r < r_c$ の時

(2.60) 式において $\Delta(r)$ をゼロと近似して

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_F^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \right] u_n(r) &= -\frac{2mE_n}{\hbar^2} u_n(r) \\ \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \left(k_F^2 - \frac{(n-1)^2}{r^2} \right) \right] v_n(r) &= \frac{2mE_n}{\hbar^2} v_n(r) \end{aligned} \quad (2.62)$$

これは Bessel の微分方程式そのもので簡単に解ける。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_1 H_n^{(1)}((k_F^2 + 2mE_n)^{1/2} r) + A_2 H_n^{(2)}((k_F^2 + 2mE_n)^{1/2} r) \\ A'_1 H_{n-1}^{(1)}((k_F^2 - 2mE_n)^{1/2} r) + A'_2 H_{n-1}^{(2)}((k_F^2 - 2mE_n)^{1/2} r) \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} A_1 H_n^{(1)}((k_F + q_n) r) + A_2 H_n^{(2)}((k_F + q_n) r) \\ A'_1 H_{n-1}^{(1)}((k_F - q_n) r) + A'_2 H_{n-1}^{(2)}((k_F - q_n) r) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.63)$$

ここで $H_n^{(i)}(x)$ ($i = 1, 2$) は Hankel 関数であり、 $q_n = \frac{E_n}{\hbar v_F}$ とした。

(2.63) 式の特異性をなくすために第 2 種 Bessel 関数 N_n にかかる因子を $r = 0$ でゼロにすると

$$A_1 = A_2, \quad A'_1 = A'_2 \quad (2.64)$$

これから

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A J_n((k_F + q_n)r) \\ A' J_{n-1}((k_F - q_n)r) \end{pmatrix} \quad (2.65)$$

となる。

(b)、 $r > r_c$ の時

この領域では $\Delta(r)$ を無視できないが、 $r < r_c$ での解から類推して Bessel 関数に変化の遅い関数をかけたものが解になると考える。

(2.60) 式を変形すると次のようになる。¹⁰

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (k_F^2 - \frac{n^2 - n + 1/2}{r^2}) \right] u_n(r) - \frac{2m}{\hbar^2} \Delta(r) v_n(r) &= - \left(\frac{2mE_n}{\hbar^2} - \frac{n - 1/2}{r^2} \right) u_n(r) \\ \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (k_F^2 - \frac{n^2 - n + 1/2}{r^2}) \right] v_n(r) + \frac{2m}{\hbar^2} \Delta(r) u_n(r) &= \left(\frac{2mE_n}{\hbar^2} - \frac{n - 1/2}{r^2} \right) v_n(r) \end{aligned} \quad (2.66)$$

これから $m^2 = n^2 - n + 1/2$ として

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = H_m^{(1)}(k_F r) \begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} + H_m^{(2)}(k_F r) \begin{pmatrix} f_2(r) \\ g_2(r) \end{pmatrix} \quad (2.67)$$

とおく。この $f(r), g(r)$ が変化の遅い関数である。以下で $\frac{\partial}{\partial r}$ を ∂ と略記する。

(2.67) 式を (2.66) 式に代入すると、 $H_m^{(1)}$ の成分に関して

$$\begin{aligned} 2 \partial H_m^{(1)} \partial f_1 + H_m^{(1)} \partial^2 f_1 + \frac{1}{r} H_m^{(1)} \partial f_1 - \frac{2m}{\hbar^2} \Delta H_m^{(1)} g_1 &= - \left(\frac{2mE_n}{\hbar^2} - \frac{n - 1/2}{r^2} \right) H_m^{(1)} f_1 \\ 2 \partial H_m^{(1)} \partial g_1 + H_m^{(1)} \partial^2 g_1 + \frac{1}{r} H_m^{(1)} \partial g_1 + \frac{2m}{\hbar^2} \Delta H_m^{(1)} f_1 &= \left(\frac{2mE_n}{\hbar^2} - \frac{n - 1/2}{r^2} \right) H_m^{(1)} g_1 \end{aligned} \quad (2.68)$$

となる。ここで Bessel の微分方程式

$$\partial^2 H_m^{(i)}(k_F r) + \frac{1}{r} \partial H_m^{(i)}(k_F r) + (k_F^2 - \frac{n^2 - n + 1/2}{r^2}) H_m^{(i)}(k_F r) = 0 \quad (i = 1, 2)$$

が成り立つことを用いた。

$k_F r \gg 1$ より

$$\partial H_m^{(1)}(k_F r) \simeq i k_F H_m^{(1)}(k_F r) \quad (2.69)$$

さらに $\partial^2 f(r), \partial^2 g(r)$ の項と (2.68) 式左辺第 3 項を無視して¹¹

$$\begin{aligned} i \hbar v_F \partial f_1(r) - \Delta(r) g_1(r) &= - \left(E_n - \frac{(n - 1/2) \hbar^2}{2m r^2} \right) f_1(r) \\ i \hbar v_F \partial g_1(r) + \Delta(r) f_1(r) &= \left(E_n - \frac{(n - 1/2) \hbar^2}{2m r^2} \right) g_1(r) \end{aligned} \quad (2.70)$$

¹⁰(2.66) 式の連立方程式において左辺右辺それぞれでの対称性のよさが方程式を解く上での鍵となる。

¹¹(2.72) 式で ∂ は $1/\xi$ 程度だと考えられる。実際求まる解もそのようなになっている。

を得る。

同様にして $H_m^{(2)}$ の成分に関して

$$\partial H_m^{(2)}(k_F r) \simeq -ik_F H_m^{(2)}(k_F r) \quad (2.71)$$

と近似をすると

$$\begin{aligned} -i\hbar v_F \partial f_2(r) - \Delta(r) g_2(r) &= -\left(E_n - \frac{(n-1/2)\hbar^2}{2mr^2}\right) f_2(r) \\ -i\hbar v_F \partial g_2(r) + \Delta(r) f_2(r) &= \left(E_n - \frac{(n-1/2)\hbar^2}{2mr^2}\right) g_2(r) \end{aligned} \quad (2.72)$$

まず $f_1(r)$, $g_1(r)$ を求める。

以下では $r \gg r_c$, $E_n \ll \Delta_\infty$ の場合を考えることにする。

この時 (2.72) 式の右辺は摂動として扱うことができ、0 次の式として

$$\begin{aligned} i\hbar v_F \partial f_1(r) - \Delta(r) g_1(r) &= 0 \\ i\hbar v_F \partial g_1(r) + \Delta(r) f_1(r) &= 0 \end{aligned} \quad (2.73)$$

を得る。この解は¹²

$$\begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} e^{-K(r)} \\ -ie^{-K(r)} \end{pmatrix} \equiv A_1 \begin{pmatrix} f_1^{(0)}(r) \\ -if_1^{(0)}(r) \end{pmatrix}, \quad K(r) = \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr' \quad (2.74)$$

となる。

次に $|\psi(r)| \ll 1$, $|\phi(r)| \ll 1$ として

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} &= A_1 \begin{pmatrix} f_1^{(0)}(r) e^{\frac{i}{2}\psi(r)} \\ -if_1^{(0)}(r) e^{\frac{i}{2}\phi(r)} \end{pmatrix} \\ &\simeq A_1 \begin{pmatrix} f_1^{(0)}(r) (1 + \frac{i}{2}\psi(r)) \\ -if_1^{(0)}(r) (1 + \frac{i}{2}\phi(r)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.75)$$

とおき、(2.72) 式を 1 次のオーダーで評価すると

$$\begin{aligned} i\hbar v_F \frac{i}{2}(\partial\psi f_1^{(0)} + \psi \partial f_1^{(0)}) + \frac{1}{2}\Delta \psi f_1^{(0)} &= -\left(E_n - \frac{(n-1/2)\hbar^2}{2mr^2}\right) f_1^{(0)} \\ i\hbar v_F \frac{1}{2}(\partial\phi f_1^{(0)} + \phi \partial f_1^{(0)}) - \frac{i}{2}\Delta \phi f_1^{(0)} &= -i\left(E_n - \frac{(n-1/2)\hbar^2}{2mr^2}\right) f_1^{(0)} \end{aligned} \quad (2.76)$$

$i\hbar v_F \partial f_1^{(0)} + i\Delta f_1^{(0)} = 0$ を用いて整理すると

$$\begin{aligned} \partial\psi - \frac{\Delta}{\hbar v_F} \psi + \frac{\Delta}{\hbar v_F} \phi &= 2q_n - \frac{(n-1/2)\hbar}{k_F r^2} \\ -\partial\phi + \frac{\Delta}{\hbar v_F} \phi - \frac{\Delta}{\hbar v_F} \psi &= 2q_n - \frac{(n-1/2)\hbar}{k_F r^2} \end{aligned} \quad (2.77)$$

ここで

$$\begin{aligned} X(r) &\equiv \psi(r) + \phi(r) \\ Y(r) &\equiv \psi(r) - \phi(r) \end{aligned} \quad (2.78)$$

¹² もう一つの解として $\begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} = A'_1 \begin{pmatrix} e^{K(r)} \\ ie^{K(r)} \end{pmatrix}$ が存在するが、物理的に $f_1(r), g_1(r)$ は ξ 程度の距離で減衰する事がのぞまれるので (2.74) 式のようになる。

とおく。

$X(r)$ に関して

$$\begin{aligned}\partial X - \frac{\Delta}{\hbar v_F} X + \frac{\Delta}{\hbar v_F} X &= 0 \\ \partial X &= 0\end{aligned}\tag{2.79}$$

よって

$$X(r) = c_1 \quad (c_1 : \text{定数})\tag{2.80}$$

また、 $Y(r)$ に関して

$$\begin{aligned}\partial Y - \frac{\Delta}{\hbar v_F} Y + \frac{\Delta}{\hbar v_F} (-Y) &= 2\left\{2q_n - \frac{(n-1/2)\hbar}{k_F r^2}\right\} \\ \partial Y - 2\frac{\Delta}{\hbar v_F} Y &= 2\left\{2q_n - \frac{(n-1/2)\hbar}{k_F r^2}\right\}\end{aligned}\tag{2.81}$$

よって

$$Y(r) = -\int_r^{c_2} 2\left\{2q_n - \frac{(n-1/2)\hbar}{k_F r'^2}\right\} e^{-2(K(r')-K(r))} dr' + Y(c_2) e^{-2(K(c_2)-K(r))} \quad (c_2 : \text{定数})\tag{2.82}$$

これより $r \ll c_2 \rightarrow \infty$ として

$$\psi(r) = -\int_r^\infty \left\{2q_n - \frac{(n-1/2)\hbar}{k_F r'^2}\right\} e^{-2(K(r')-K(r))} dr' \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}\phi(r) &= \int_r^\infty \left\{2q_n - \frac{(n-1/2)\hbar}{k_F r'^2}\right\} e^{-2(K(r')-K(r))} dr' \\ &= -\psi(r)\end{aligned}\tag{2.84}$$

ここで定数 c_1 の自由度は A_1 に含めることができるので $c_1 = 0$ とおいた。

以上をまとめると

$$\begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} e^{-K(r)+\frac{i}{2}\psi(r)} \\ -ie^{-K(r)-\frac{i}{2}\psi(r)} \end{pmatrix}\tag{2.85}$$

ただし

$$\psi(r) = -\int_r^\infty \left\{2q_n - \frac{(n-1/2)\hbar}{k_F r'^2}\right\} e^{-2(K(r')-K(r))} dr' \tag{2.86}$$

まったく同様に $f_2(r)$, $g_2(r)$ を求めると

$$\begin{pmatrix} f_2(r) \\ g_2(r) \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} e^{-K(r)-\frac{i}{2}\psi(r)} \\ ie^{-K(r)+\frac{i}{2}\psi(r)} \end{pmatrix}\tag{2.87}$$

となる。ここで $\psi(r)$ は (2.86) 式で定義される関数である。

次に $r \ll r_c$, $r \gg r_c$ の二つの解を $r \sim r_c$ においてつなぎ合わせることを考える。

Bessel 関数の $x \gg |n|$ での漸近形

$$\begin{aligned} J_n(x) &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x + \frac{n^2 - 1/4}{2x} - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \\ H_n^{(1)} &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{i\left(x + \frac{n^2 - 1/4}{2x} - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} \\ H_n^{(2)} &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-i\left(x + \frac{n^2 - 1/4}{2x} - \frac{2n+1}{4}\pi\right)} \end{aligned} \quad (2.88)$$

を用いると

$r \ll r_c$ の表式から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A J_n((k_F + q_n)r) \\ A' J_{n-1}((k_F - q_n)r) \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} A \sqrt{\frac{2}{\pi(k_F + q_n)r}} \cos\left((k_F + q_n)r + \frac{n^2 - 1/4}{2(k_F + q_n)r} - \frac{2n+1}{4}\pi\right) \\ A' \sqrt{\frac{2}{\pi(k_F - q_n)r}} \cos\left((k_F - q_n)r + \frac{n^2 - 2n + 3/4}{2(k_F - q_n)r} - \frac{2n-1}{4}\pi\right) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.89)$$

$r \gg r_c$ の表式から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} &= A_1 H_m^{(1)}(k_F r) \begin{pmatrix} e^{-K(r) + \frac{i}{2}\psi(r)} \\ -i e^{-K(r) - \frac{i}{2}\psi(r)} \end{pmatrix} + A_2 H_m^{(2)}(k_F r) \begin{pmatrix} e^{-K(r) - \frac{i}{2}\psi(r)} \\ i e^{-K(r) + \frac{i}{2}\psi(r)} \end{pmatrix} \\ &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_F r}} e^{-K(r)} \begin{pmatrix} A_1 e^{i(k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi(r))} \\ + A_2 e^{-i(k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi(r))} \\ -i A_1 e^{i(k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi(r))} \\ + i A_2 e^{-i(k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi(r))} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.90)$$

ここで

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} A e^{i\alpha} = \frac{i}{2} A' e^{i\alpha'} \\ A_2 &= \frac{1}{2} A e^{i\beta} = \frac{i}{2} A' e^{i\beta'} \end{aligned} \quad (2.91)$$

とおくと

(2.89)、(2.90) 式より

$$\begin{aligned} k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi + \alpha \\ = k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi - \beta \\ = (k_F + q_n)r + \frac{n^2 - 1/4}{2(k_F + q_n)r} - \frac{2n+1}{4}\pi \end{aligned} \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi + \alpha' \\ = k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi - \beta' + (2l+1)\pi \\ = (k_F - q_n)r + \frac{n^2 - 2n + 3/4}{2(k_F - q_n)r} - \frac{2n-1}{4}\pi \end{aligned} \quad (2.93)$$

(ここで l : 整数)

(2.92)、(2.93) 式より $l = -1$ とすると

$$\begin{aligned}\beta &= -\alpha \\ \beta' &= -\alpha' + \pi\end{aligned}\tag{2.94}$$

(2.91) 式より

$$\begin{aligned}A_1/A_2 &= e^{i(\alpha-\beta)} = e^{2i\alpha} \\ &= e^{i(\alpha'-\beta')} = e^{i(2\alpha'-\pi)}\end{aligned}\tag{2.95}$$

よって

$$\alpha' = \alpha + (k + 1/2)\pi\tag{2.96}$$

(ここで k : 整数)

また、(2.92) 式より

$$\begin{aligned}\psi/2 &= q_n r + \frac{1}{2r} \left(\frac{n^2 - 1/4}{k_F + q_n} - \frac{m^2 - 1/4}{k_F} \right) - \frac{\pi}{2}(n - m) - \alpha \\ &\simeq \frac{n - 1/2}{2k_F r} + q_n r - \frac{\pi}{2}(n - m) - \alpha\end{aligned}\tag{2.97}$$

(2.93) 式より

$$\begin{aligned}-\psi/2 &= -q_n r + \frac{1}{2r} \left(\frac{n^2 - 2n + 3/4}{k_F - q_n} - \frac{m^2 - 1/4}{k_F} \right) - \frac{\pi}{2}(n - m - 1) - \alpha' \\ &\simeq -\frac{n - 1/2}{2k_F r} - q_n r - \frac{\pi}{2}(n - m - 1) - \alpha'\end{aligned}\tag{2.98}$$

よって

$$-\frac{\pi}{2}(n - m) - \alpha = \frac{\pi}{2}(n - m - 1) + \alpha'\tag{2.99}$$

従って、(2.96)、(2.99) 式より

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}(n - m) - \frac{\pi}{2}k\tag{2.100}$$

これを (2.97) 式に代入して

$$\psi(r) = \frac{n - 1/2}{k_F r} + 2q_n r + k\pi\tag{2.101}$$

一方、(2.86) 式より $r \sim r_c$ で

$$\begin{aligned}
\psi(r) &= - \int_r^\infty \left\{ 2q_n - \frac{(n-1/2)\hbar}{k_F r'^2} \right\} e^{-2(K(r')-K(r))} dr' \\
&= - \int_r^\infty 2q_n e^{-2(K(r')-K(r))} dr' \\
&\quad + e^{2K(r)} \left(\left[-e^{-2K(r')} \frac{n-1/2}{k_F r'} \right]_r^\infty - \int_r^\infty e^{-2K(r')} \frac{2\Delta(r')}{\hbar v_F} \frac{n-1/2}{k_F r'} dr' \right) \\
&= \frac{n-1/2}{k_F r} - \int_r^\infty \left\{ 2q_n + \frac{2\Delta(r')}{\hbar v_F} \frac{n-1/2}{k_F r'} \right\} e^{-2(K(r')-K(r))} dr' \\
&\simeq \frac{n-1/2}{k_F r} - \int_0^\infty \left\{ 2q_n + \frac{2\Delta(r')}{\hbar v_F} \frac{n-1/2}{k_F r'} \right\} e^{-2K(r')} dr' \\
&\quad + 2q_n r + \int_0^r \frac{2\Delta(r')}{\hbar v_F} \frac{n-1/2}{k_F r'} dr' \tag{2.102}
\end{aligned}$$

これと (2.101) 式が一致するには

$r \sim r_c$ において

$$- \int_0^\infty \left\{ 2q_n + \frac{2\Delta(r')}{\hbar v_F} \frac{n-1/2}{k_F r'} \right\} e^{-2K(r')} dr' + \int_0^r \frac{2\Delta(r')}{\hbar v_F} \frac{n-1/2}{k_F r'} dr' = k\pi \tag{2.103}$$

であればよい。

よって

$$q_n = - \frac{\int_0^\infty \frac{\Delta(r')}{\hbar v_F} \frac{n-1/2}{k_F r'} e^{-2K(r')} dr'}{\int_0^\infty e^{-2K(r')} dr'} - \frac{k\pi}{2 \int_0^\infty e^{-2K(r')} dr'} + \frac{\int_0^r \frac{\Delta(r')}{\hbar v_F} \frac{n-1/2}{k_F r'} dr'}{\int_0^\infty e^{-2K(r')} dr'} \tag{2.104}$$

ここで $r \ll \xi$ より (第1項) $\gg$ (第3項)

また

$\Delta(r) = \Delta_\infty \tanh(r/\xi)$ を仮定すると

$$\int_0^\infty e^{-2K(r')} dr' = \xi \tag{2.105}$$

より、 $k \neq 0$ の場合 $E_n \sim \frac{\hbar v_F}{\xi} = \Delta_\infty$ となり今考えている状況 (低エネルギー vortex 束縛状態) にそぐわない。

これより¹³

$$q_n = - \frac{\int_0^\infty \frac{\Delta(r')}{\hbar v_F} \frac{n-1/2}{k_F r'} e^{-2K(r')} dr'}{\int_0^\infty e^{-2K(r')} dr'} \tag{2.106}$$

よって

$$\begin{aligned}
E_n &= -(n - \frac{1}{2})\omega_0 \\
\omega_0 &= \frac{\int_0^\infty \frac{\Delta(r')}{k_F r'} e^{-2K(r')} dr'}{\int_0^\infty e^{-2K(r')} dr'} \tag{2.107}
\end{aligned}$$

また (2.91) 式より

$$\begin{aligned}
A' &= -A \\
A_1 &= \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}(n-m)} A \\
A_2 &= \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(n-m)} A \tag{2.108}
\end{aligned}$$

となる。

¹³結局 (2.102) 式で leading term は $\frac{n-1/2}{k_F r}$ であり、2つの方法で求めた $\psi(r)$ の r 依存性は $r \sim r_c$ においてよく一致することがいえる。

以上をまとめると

$$\begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{in\theta} u_n(r) \\ e^{i(n-1)\theta} v_n(r) \end{pmatrix} \quad (2.109)$$

として

• for $r < r_c$

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} J_n((k_F + q_n)r) \\ -J_{n-1}((k_F - q_n)r) \end{pmatrix} \quad (2.110)$$

• for $r \geq r_c$

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = A \sqrt{\frac{2}{\pi k_F r}} e^{-K(r)} \begin{pmatrix} \cos(k_F r + \frac{n^2 - n + 1/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi_n(r)) \\ \sin(k_F r + \frac{n^2 - n + 1/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi_n(r)) \end{pmatrix} \quad (2.111)$$

ここで

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr' \\ \psi_n(r) &= - \int_r^\infty dr' e^{2K(r) - 2K(r')} \left(2 \frac{E_n}{\hbar v_F} - \frac{n - 1/2}{k_F r'^2} \right) \\ E_n &= -(n - \frac{1}{2})\omega_0 \end{aligned} \quad (2.112)$$

2.4.2 カイラル p 波 positive vortex の場合

カイラル p 波 vortex に対する B-d G 方程式は

$$\begin{pmatrix} h_0 & -\frac{i}{k_F}\{\Delta(\mathbf{r})\square^+ + \frac{1}{2}[\square^+\Delta(\mathbf{r})]\} \\ -\frac{i}{k_F}\{\Delta^*(\mathbf{r})\square^- + \frac{1}{2}[\square^-\Delta^*(\mathbf{r})]\} & -h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

ここで

$$\square^\pm = \frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} = e^{\pm i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

次のような解を考える。

$$\begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{in\theta} u_n(r) \\ e^{i(n-2)\theta} v_n(r) \end{pmatrix} \quad (2.114)$$

これを (2.113) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (k_F^2 - \frac{n^2}{r^2}) \right] u_n(r) + \frac{2im}{k_F} \left\{ \Delta(r) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta(r)}{\partial r} - \frac{n-3/2}{r} \Delta(r) \right) \right\} v_n(r) &= -2mE_n u_n(r) \\ \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (k_F^2 - \frac{(n-2)^2}{r^2}) \right] v_n(r) - \frac{2im}{k_F} \left\{ \Delta(r) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta(r)}{\partial r} + \frac{n-1/2}{r} \Delta(r) \right) \right\} u_n(r) &= 2mE_n v_n(r) \end{aligned} \quad (2.115)$$

以下では低エネルギー励起状態に対する解を求めることにし、 $|n| \ll k_F \xi$ としておく。

S 波の場合と同様に距離 r_c を定義し、 $r \ll r_c$, $r \gg r_c$ での二つの解をつなぎ合わせることを考えていく。ここで $|n|k_F \ll r_c \ll \xi$ である。

(a)、 $r < r_c$ の時

(2.115) 式において $\Delta(r)$ をゼロと近似して解いて

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A J_n((k_F^2 + 2mE_n)^{1/2} r) \\ A' J_{n-2}((k_F^2 - 2mE_n)^{1/2} r) \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} A J_n((k_F + q_n)r) \\ A' J_{n-2}((k_F - q_n)r) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.116)$$

(b)、 $r > r_c$ の時

(2.115) 式を変形すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (k_F^2 - \frac{n^2 - 2n + 2}{r^2}) \right] u_n(r) + \frac{2im}{k_F} \left\{ \Delta(r) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta(r)}{\partial r} + \frac{\Delta(r)}{2r} \right) \right\} v_n(r) \\
& = - \left\{ 2mE_n - \frac{2(n-1)}{r^2} \right\} u_n(r) + \frac{2i(n-1)m\Delta(r)}{k_F r} v_n(r) \\
& \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (k_F^2 - \frac{n^2 - 2n + 2}{r^2}) \right] v_n(r) - \frac{2im}{k_F} \left\{ \Delta(r) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta(r)}{\partial r} + \frac{\Delta(r)}{2r} \right) \right\} u_n(r) \\
& = \left\{ 2mE_n - \frac{2(n-1)}{r^2} \right\} v_n(r) + \frac{2i(n-1)m\Delta(r)}{k_F r} u_n(r)
\end{aligned} \tag{2.117}$$

これから $m^2 = n^2 - 2n + 2$ として

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = H_m^{(1)}(k_F r) \begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} + H_m^{(2)}(k_F r) \begin{pmatrix} f_2(r) \\ g_2(r) \end{pmatrix} \tag{2.118}$$

とおく。

(2.118) 式を (2.117) 式に代入すると、 $H_m^{(1)}$ の成分に関して

$$\begin{aligned}
\partial f_1 + \frac{im\Delta}{k_F} g_1 + \frac{m}{k_F^2} \left[\Delta \partial g_1 + \frac{\partial \Delta}{2} g_1 + \frac{\Delta}{2r} g_1 \right] - \frac{i}{2k_F r} \partial f_1 &= \frac{i}{k_F} \left\{ mE_n - \frac{n-1}{r^2} \right\} f_1 + \frac{(n-1)m\Delta}{k_F^2 r} g_1 \\
\partial g_1 - \frac{im\Delta}{k_F} f_1 - \frac{m}{k_F^2} \left[\Delta \partial f_1 + \frac{\partial \Delta}{2} f_1 + \frac{\Delta}{2r} f_1 \right] - \frac{i}{2k_F r} \partial g_1 &= -\frac{i}{k_F} \left\{ mE_n - \frac{n-1}{r^2} \right\} g_1 + \frac{(n-1)m\Delta}{k_F^2 r} f_1
\end{aligned} \tag{2.119}$$

ここで

- ・ $\partial^2 f(r), \partial^2 g(r)$ の項を無視
- ・ $\partial H_m^{(1)}(k_F r) \simeq ik_F H_m^{(1)}(k_F r)$

を使った。

(2.119) 式において $h(r) = f_1(r), g_1(r)$ とすると

$k_F r \gg 1$ より

$$\begin{aligned}
\frac{m\Delta}{k_F} h(r) &\gg \frac{m}{k_F^2} \left[\Delta \partial h(r) + \frac{\partial \Delta}{2} h(r) + \frac{\Delta}{2r} h(r) \right] \\
\partial h(r) &\gg \frac{1}{2k_F r} \partial h(r)
\end{aligned} \tag{2.120}$$

よって (2.119) 式は

$$\begin{aligned}
\partial f_1 + \frac{im\Delta}{k_F} g_1 &= \frac{i}{k_F} \left\{ mE_n - \frac{n-1}{r^2} \right\} f_1 + \frac{(n-1)m\Delta}{k_F^2 r} g_1 \\
\partial g_1 - \frac{im\Delta}{k_F} f_1 &= -\frac{i}{k_F} \left\{ mE_n - \frac{n-1}{r^2} \right\} g_1 + \frac{(n-1)m\Delta}{k_F^2 r} f_1
\end{aligned} \tag{2.121}$$

と近似できる。¹⁴

以下では $r \gg r_c, E_n \ll \Delta_\infty$ の場合を考えることにする。

¹⁴ この近似をしなくても (2.119) 式は議論できる。近似をしない場合、例えば (2.123) 式は

$K(r) = \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \frac{\Delta(r') - \frac{i}{2k_F} (\partial \Delta(r') + \frac{\Delta(r')}{r'})}{1 - \frac{i}{k_F} (\frac{m\Delta(r')}{k_F} + \frac{1}{2r'})} dr' \simeq \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr'$ となる。

この時 (2.121) 式の右辺は摂動として扱うことができ、0 次の式として

$$\begin{aligned}\partial f_1(r) + \frac{im\Delta}{k_F} g_1 &= 0 \\ \partial g_1(r) - \frac{im\Delta}{k_F} f_1 &= 0\end{aligned}\tag{2.122}$$

この解は

$$\begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} e^{-K(r)} \\ -ie^{-K(r)} \end{pmatrix} \equiv A_1 \begin{pmatrix} f_1^{(0)}(r) \\ -i f_1^{(0)}(r) \end{pmatrix}, \quad K(r) = \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr'\tag{2.123}$$

次に $|\psi(r)| \ll 1, |\phi(r)| \ll 1$ として

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} &= A_1 \begin{pmatrix} f_1^{(0)}(r) e^{i\psi(r)} \\ -i f_1^{(0)}(r) e^{i\phi(r)} \end{pmatrix} \\ &\simeq A_1 \begin{pmatrix} f_1^{(0)}(r) (1 + i\psi(r)) \\ -i f_1^{(0)}(r) (1 + i\phi(r)) \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{2.124}$$

とおき (2.121) 式を 1 次のオーダーで評価する。

$$\begin{aligned}\partial\psi - \frac{m\Delta}{k_F}\psi + \frac{m\Delta}{k_F}\phi &= \frac{1}{k_F} \left\{ mE_n - \frac{n-1}{r^2} \right\} - \frac{(n-1)m\Delta}{k_F^2 r} \\ -\partial\phi + \frac{m\Delta}{k_F}\phi - \frac{m\Delta}{k_F}\psi &= \frac{1}{k_F} \left\{ mE_n - \frac{n-1}{r^2} \right\} - \frac{(n-1)m\Delta}{k_F^2 r}\end{aligned}\tag{2.125}$$

ここで $\partial f_1^{(0)} + \frac{m\Delta}{k_F} f_1^{(0)} = 0$ を用いた。

これを S 波の時と同様にして解くと

$$\begin{aligned}\psi(r) &= -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty e^{-2(K(r')-K(r))} \left\{ E_n - \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'} - \frac{n-1}{mr'^2} \right\} dr' \\ \phi(r) &= \frac{m}{k_F} \int_r^\infty e^{-2(K(r')-K(r))} \left\{ E_n - \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'} - \frac{n-1}{mr'^2} \right\} dr'\end{aligned}\tag{2.126}$$

以上より

$$\begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} e^{-K(r)+i\psi(r)} \\ -ie^{-K(r)-i\psi(r)} \end{pmatrix}\tag{2.127}$$

ただし

$$\psi(r) = -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty e^{-2(K(r')-K(r))} \left\{ E_n - \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'} - \frac{n-1}{mr'^2} \right\} dr'\tag{2.128}$$

まったく同様にして $f_2(r), g_2(r)$ を求めると

$$\begin{pmatrix} f_2(r) \\ g_2(r) \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} e^{-K(r)-i\psi(r)} \\ -ie^{-K(r)+i\psi(r)} \end{pmatrix}\tag{2.129}$$

となる。ここで $\psi(r)$ は (2.128) 式で定義される関数である。

次に $r \ll r_c$, $r \gg r_c$ の二つの解を $r \sim r_c$ においてつなぎ合わせることを考える。

Bessel 関数の漸近形を用いると

$r \ll r_c$ の表式から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A J_n((k_F + q_n)r) \\ A' J_{n-2}((k_F - q_n)r) \end{pmatrix} \\ &\simeq \begin{pmatrix} A \sqrt{\frac{2}{\pi(k_F + q_n)r}} \cos((k_F + q_n)r + \frac{n^2 - 1/4}{2(k_F + q_n)r} - \frac{2n+1}{4}\pi) \\ A' \sqrt{\frac{2}{\pi(k_F - q_n)r}} \cos((k_F - q_n)r + \frac{n^2 - 4n + 15/4}{2(k_F - q_n)r} - \frac{2n-3}{4}\pi) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.130)$$

$r \gg r_c$ の表式から

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} &= A_1 H_m^{(1)}(k_F r) \begin{pmatrix} e^{-K(r) + i\psi(r)} \\ -ie^{-K(r) - i\psi(r)} \end{pmatrix} + A_2 H_m^{(2)}(k_F r) \begin{pmatrix} e^{-K(r) - i\psi(r)} \\ -ie^{-K(r) + i\psi(r)} \end{pmatrix} \\ &\simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_F r}} e^{-K(r)} \begin{pmatrix} A_1 e^{i(k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi + \psi(r))} \\ + A_2 e^{-i(k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi + \psi(r))} \\ -iA_1 e^{i(k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi - \psi(r))} \\ + iA_2 e^{-i(k_F r + \frac{m^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2m+1}{4}\pi - \psi(r))} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.131)$$

(2.130)、(2.131) 式を S 波の場合と同様に議論していくと k を整数として以下の結果を得る。

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \frac{n-1}{k_F r} + \frac{m E_n r}{k_F} + \frac{k}{2} \pi \\ A_1 &= \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{2}(n-m+k)} A \\ A_2 &= \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}(n-m+k)} A \\ A' &= e^{-i(k+3/2)\pi} A \end{aligned} \quad (2.132)$$

一方、(2.128) 式より $r \sim r_c$ で

$$\begin{aligned} \psi(r) &= -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty e^{-2(K(r') - K(r))} \left\{ E_n - \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'} - \frac{n-1}{m r'^2} \right\} dr' \\ &\simeq -\frac{m}{k_F} E_n \int_0^\infty dr' e^{-2K(r')} + \frac{m}{k_F} E_n r \\ &\quad + \frac{m}{k_F} \left\{ \int_r^\infty dr' e^{-2K(r')} \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'} + \left[e^{-2K(r)} \frac{-(n-1)}{m r} \right]_r^\infty - \int_r^\infty dr' e^{-2K(r')} \frac{-2m\Delta(r')}{k_F} \frac{-(n-1)}{m r'} \right\} \\ &= \frac{n-1}{k_F r} - \frac{m}{k_F} \left\{ \int_0^\infty dr' e^{-2K(r')} (E_n + \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'}) \right\} \\ &\quad + \frac{m E_n r}{k_F} + \frac{m}{k_F} \int_0^r dr' e^{-2K(r')} \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'} \end{aligned} \quad (2.133)$$

これと (2.132) 式が一致するには

$r \sim r_c$ において

$$-\frac{m}{k_F} \left\{ \int_0^\infty dr' e^{-2K(r')} (E_n + \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'}) \right\} + \frac{m}{k_F} \int_0^r dr' e^{-2K(r')} \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'} = \frac{k}{2} \pi \quad (2.134)$$

であればよい。

(2.134) 式で

- ・ 右辺において (第1項) $\gg$ (第2項)
- ・ $k=0$ でないと $E_n \ll \Delta_\infty$ を満たさない。

の点を考慮すると

$$-\frac{m}{k_F} \left\{ \int_0^\infty dr' e^{-2K(r')} \left(E_n + \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'} \right) \right\} = 0 \quad (2.135)$$

よって

$$\begin{aligned} E_n &= -(n-1)\omega_0 \\ \omega_0 &= \frac{\int_0^\infty dr' e^{-2K(r')} \frac{\Delta(r')}{k_F r'}}{\int_0^\infty dr' e^{-2K(r')}} \end{aligned} \quad (2.136)$$

以上をまとめると

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{in\theta} u_n(r) \\ e^{i(n-2)\theta} v_n(r) \end{pmatrix} \quad (2.137)$$

として

- ・ for $r < r_c$

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} J_n((k_F + q_n)r) \\ iJ_{n-2}((k_F - q_n)r) \end{pmatrix} \quad (2.138)$$

- ・ for $r \geq r_c$

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = A \sqrt{\frac{2}{\pi k_F r}} e^{-K(r)} \begin{pmatrix} \cos(k_F r + \frac{n^2-2n+7/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi + \psi_n(r)) \\ -i \cos(k_F r + \frac{n^2-2n+7/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi - \psi_n(r)) \end{pmatrix} \quad (2.139)$$

ここで

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr' \\ \psi_n(r) &= -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty dr' e^{2K(r)-2K(r')} \left(E_n - \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'} - \frac{n-1}{mr'^2} \right) \\ E_n &= -(n-1)\omega_0 \end{aligned} \quad (2.140)$$

2.4.3 カイラル p 波 negative vortex の場合

カイラル p 波 vortex に対する B-d G 方程式は

$$\begin{pmatrix} h_0 & -\frac{i}{k_F} \{ \Delta(\mathbf{r}) \square^+ + \frac{1}{2} [\square^+ \Delta(\mathbf{r})] \} \\ -\frac{i}{k_F} \{ \Delta^*(\mathbf{r}) \square^- + \frac{1}{2} [\square^- \Delta^*(\mathbf{r})] \} & -h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = E_n \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (2.141)$$

ここで

$$\square^\pm = \frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y} = e^{\pm i\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} \pm \frac{i}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

次のような解を考える。

$$\begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = e^{in\theta} \begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} \quad (2.142)$$

これを (2.141) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (k_F^2 - \frac{n^2}{r^2}) \right] u_n(r) + \frac{2im}{k_F} \left\{ \Delta(r) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta(r)}{\partial r} - \frac{n-1/2}{r} \Delta(r) \right) \right\} v_n(r) &= -2mE_n u_n(r) \\ \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (k_F^2 - \frac{n^2}{r^2}) \right] v_n(r) - \frac{2im}{k_F} \left\{ \Delta(r) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta(r)}{\partial r} + \frac{n+1/2}{r} \Delta(r) \right) \right\} u_n(r) &= 2mE_n v_n(r) \end{aligned} \quad (2.143)$$

以下では低エネルギー励起状態に対する解を求めることにし $|n| \ll k_F \xi$ としておく。

(2.143) 式を変形すると次のようになる。

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (k_F^2 - \frac{n^2}{r^2}) \right] u_n(r) + \frac{2im}{k_F} \left\{ \Delta(r) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta(r)}{\partial r} + \frac{\Delta(r)}{2r} \right) \right\} v_n(r) \\ = -2mE_n u_n(r) + \frac{2inm\Delta(r)}{k_F r} v_n(r) \\ \left[\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + (k_F^2 - \frac{n^2}{r^2}) \right] v_n(r) - \frac{2im}{k_F} \left\{ \Delta(r) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \Delta(r)}{\partial r} + \frac{\Delta(r)}{2r} \right) \right\} u_n(r) \\ = 2mE_n v_n(r) + \frac{2inm\Delta(r)}{k_F r} u_n(r) \end{aligned} \quad (2.144)$$

これから

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = H_n^{(1)}(k_F r) \begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} + H_n^{(2)}(k_F r) \begin{pmatrix} f_2(r) \\ g_2(r) \end{pmatrix} \quad (2.145)$$

と置く。

(2.145) 式を (2.144) 式に代入すると、 $H_n^{(1)}$ の成分に関して

$$\begin{aligned} \partial f_1 + \frac{im\Delta}{k_F} g_1 + \frac{m}{k_F^2} \left[\Delta \partial g_1 + \frac{\partial \Delta}{2} g_1 + \frac{\Delta}{2r} g_1 \right] - \frac{i}{2k_F r} \partial f_1 &= \frac{imE_n}{k_F} f_1 + \frac{n m \Delta}{k_F^2 r} g_1 \\ \partial g_1 - \frac{im\Delta}{k_F} f_1 - \frac{m}{k_F^2} \left[\Delta \partial f_1 + \frac{\partial \Delta}{2} f_1 + \frac{\Delta}{2r} f_1 \right] - \frac{i}{2k_F r} \partial g_1 &= -\frac{imE_n}{k_F} g_1 + \frac{n m \Delta}{k_F^2 r} f_1 \end{aligned} \quad (2.146)$$

を得る。

ここで

- ・ $\partial^2 f(r), \partial^2 g(r)$ の項を無視
- ・ $\partial H_n^{(1)}(k_F r) \simeq i k_F H_n^{(1)}(k_F r)$

を使った。

(2.146) 式において $h(r) = f_1(r), g_1(r)$ とすると

$k_F r \gg 1$ より

$$\begin{aligned} \frac{m\Delta}{k_F} h(r) &\gg \frac{m}{k_F^2} \left[\Delta \partial h(r) + \frac{\partial \Delta}{2} h(r) + \frac{\Delta}{2r} h(r) \right] \\ \partial h(r) &\gg \frac{1}{2k_F r} \partial h(r) \end{aligned} \quad (2.147)$$

よって (2.146) 式は

$$\begin{aligned} \partial f_1 + \frac{im\Delta}{k_F} g_1 &= \frac{imE_n}{k_F} f_1 + \frac{n m \Delta}{k_F^2 r} g_1 \\ \partial g_1 - \frac{im\Delta}{k_F} f_1 &= -\frac{imE_n}{k_F} g_1 + \frac{n m \Delta}{k_F^2 r} f_1 \end{aligned} \quad (2.148)$$

と近似できる。

ここで positive vortex の場合との相違として、 r の小さいところでも右辺の $\frac{n m \Delta}{k_F^2 r} h(r)$ を摂動として扱えることが挙げられる。¹⁵ $\Delta(r) = \Delta_\infty \tanh(r/\xi)$ として $r \ll \xi$ で見積もると

$$\begin{aligned} \frac{n m \Delta}{k_F^2 r} h(r) &\sim \frac{n m \Delta_\infty r}{k_F^2 r \xi} h(r) = \frac{m n \Delta_\infty}{k_F^2 \xi} h(r) \\ &\sim \frac{\Delta_\infty n}{E_F \xi} h(r) \ll \frac{1}{\xi} h(r) \sim \partial h(r) \end{aligned} \quad (2.149)$$

よって上記のことが成立する。

以下では $r \gg r_c, E_n \ll \Delta_\infty$ の場合を考えることにする。

(2.148) 式の右辺を摂動として扱い、0 次の式として

$$\begin{aligned} \partial f_1(r) + \frac{im\Delta}{k_F} g_1 &= 0 \\ \partial g_1(r) - \frac{im\Delta}{k_F} f_1 &= 0 \end{aligned} \quad (2.150)$$

この解は

$$\begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} e^{-K(r)} \\ -i e^{-K(r)} \end{pmatrix} \equiv A_1 \begin{pmatrix} f_1^{(0)}(r) \\ -i f_1^{(0)}(r) \end{pmatrix}, \quad K(r) = \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr' \quad (2.151)$$

次に $|\psi(r)| \ll 1, |\phi(r)| \ll 1$ として

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} &= A_1 \begin{pmatrix} f_1^{(0)}(r) e^{i\psi(r)} \\ -i f_1^{(0)}(r) e^{i\phi(r)} \end{pmatrix} \\ &\simeq A_1 \begin{pmatrix} f_1^{(0)}(r) (1 + i\psi(r)) \\ -i f_1^{(0)}(r) (1 + i\phi(r)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.152)$$

とおく。(2.148) 式を 1 次のオーダーで評価して次の式を得る。

$$\begin{aligned} \partial \psi - \frac{m\Delta}{k_F} \psi + \frac{m\Delta}{k_F} \phi &= \frac{mE_n}{k_F} - \frac{n m \Delta}{k_F^2 r} \\ -\partial \phi + \frac{m\Delta}{k_F} \phi - \frac{m\Delta}{k_F} \psi &= \frac{mE_n}{k_F} - \frac{n m \Delta}{k_F^2 r} \end{aligned} \quad (2.153)$$

¹⁵だから positive vortex の場合と異なり r_c を導入する必要がなかったのである。

ここで $\partial f_1^{(0)} + \frac{m\Delta}{k_F} f_1^{(0)} = 0$ を用いた。

これを S 波の時と同様にして解くと

$$\begin{aligned}\psi(r) &= -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty e^{-2(K(r')-K(r))} \left(E_n - \frac{n\Delta(r')}{k_F r'} \right) dr' \\ \phi(r) &= \frac{m}{k_F} \int_r^\infty e^{-2(K(r')-K(r))} \left(E_n - \frac{n\Delta(r')}{k_F r'} \right) dr'\end{aligned}\quad (2.154)$$

以上より

$$\begin{pmatrix} f_1(r) \\ g_1(r) \end{pmatrix} = A_1 \begin{pmatrix} e^{-K(r)+i\psi(r)} \\ -i e^{-K(r)-i\psi(r)} \end{pmatrix}\quad (2.155)$$

ただし

$$\psi(r) = -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty e^{-2(K(r')-K(r))} \left(E_n - \frac{n\Delta(r')}{k_F r'} \right) dr' \quad (2.156)$$

まったく同様にして $f_2(r)$, $g_2(r)$ を求めると

$$\begin{pmatrix} f_2(r) \\ g_2(r) \end{pmatrix} = A_2 \begin{pmatrix} e^{-K(r)-i\psi(r)} \\ -i e^{-K(r)+i\psi(r)} \end{pmatrix}\quad (2.157)$$

となる。ここで $\psi(r)$ は (2.156) 式で定義される関数である。

今までの議論から

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = A_1 H_n^{(1)}(k_F r) \begin{pmatrix} e^{-K(r)+i\psi(r)} \\ -i e^{-K(r)-i\psi(r)} \end{pmatrix} + A_2 H_n^{(2)}(k_F r) \begin{pmatrix} e^{-K(r)-i\psi(r)} \\ -i e^{-K(r)+i\psi(r)} \end{pmatrix}\quad (2.158)$$

ここで (2.158) 式の特異性をなくすために第 2 種 Bessel 関数 N_n にかかる因子を $r = 0$ でゼロにすると

$$\begin{aligned}A_1 e^{i\psi(0)} - A_2 e^{-i\psi(0)} &= 0 \\ A_1 e^{-i\psi(0)} - A_2 e^{i\psi(0)} &= 0 \\ \implies A_1 &= A_2, \quad \psi(0) = 0\end{aligned}\quad (2.159)$$

これより

$$\begin{aligned}E_n &= n\omega_0 \\ \omega_0 &= \frac{\int_0^\infty dr' e^{-2K(r')} \frac{\Delta(r')}{k_F r'}}{\int_0^\infty dr' e^{-2K(r')}}\end{aligned}\quad (2.160)$$

以上の結果をまとめると

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = A e^{in\theta} e^{-K(r)} \begin{pmatrix} H_n^{(1)}(k_F r) e^{i\psi(r)} + H_n^{(2)}(k_F r) e^{-i\psi(r)} \\ -i \{ H_n^{(1)}(k_F r) e^{-i\psi(r)} + H_n^{(2)}(k_F r) e^{i\psi(r)} \} \end{pmatrix}\quad (2.161)$$

ここで

$$\begin{aligned}K(r) &= \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr' \\ \psi_n(r) &= -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty dr' e^{2K(r)-2K(r')} \left(E_n - \frac{n\Delta(r')}{k_F r'} \right) \\ E_n &= n\omega_0\end{aligned}\quad (2.162)$$

2.4.4 解の規格化

(a)、S 波の場合

s 波 vortex に対する B-dG 方程式の解は

$$\begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{in\theta} u_n(r) \\ e^{i(n-1)\theta} v_n(r) \end{pmatrix} \quad (2.163)$$

として

• for $r < r_c$

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} J_n((k_F + q_n)r) \\ -J_{n-1}((k_F - q_n)r) \end{pmatrix} \quad (2.164)$$

• for $r \geq r_c$

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = A \sqrt{\frac{2}{\pi k_F r}} e^{-K(r)} \begin{pmatrix} \cos(k_F r + \frac{n^2 - n + 1/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi_n(r)) \\ \sin(k_F r + \frac{n^2 - n + 1/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi_n(r)) \end{pmatrix} \quad (2.165)$$

ここで

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr' \\ \psi_n(r) &= - \int_r^\infty dr' e^{2K(r) - 2K(r')} (2q_n - \frac{n - 1/2}{k_F r'^2}) \\ E_n &= -(n - \frac{1}{2})\omega_0 \end{aligned} \quad (2.166)$$

この節では $u_n(\mathbf{r})$, $v_n(\mathbf{r})$ に対する規格化条件

$$\int d\mathbf{r} (u_n(\mathbf{r}) u_n^*(\mathbf{r}) + v_n(\mathbf{r}) v_n^*(\mathbf{r})) = 1 \quad (2.167)$$

を用いて A を決定していく。

(2.167) 式より¹⁶

$$\begin{aligned} 1 &= 2\pi |A|^2 \left[\int_0^{r_c} dr r \left(J_n^2((k_F + q_n)r) + J_{n-1}^2((k_F - q_n)r) \right) \right. \\ &\quad + \int_{r_c}^\infty dr r \frac{2}{\pi k_F r} e^{-2K(r)} \left\{ \cos^2(k_F r + \frac{n^2 - n + 1/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi + \frac{1}{2}\psi_n(r)) \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2(k_F r + \frac{n^2 - n + 1/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi - \frac{1}{2}\psi_n(r)) \right\} \right] \end{aligned} \quad (2.168)$$

ここで $x \gg |\nu|$ に対して近似的に¹⁷

$$\int_0^x dx' x' J_\nu^2(x') \sim \frac{x}{\pi} \quad (2.169)$$

¹⁶(2.168) 式で因子 2π は角度積分による。

¹⁷(2.169) 式は $\int_0^x dx' x' J_\nu^2(\alpha_\nu x') = \frac{x^2}{2} J_{\nu+1}^2(\alpha_\nu x)$ for $J_\nu(\alpha_\nu x) = 0$ より $\alpha_\nu x \gg \nu$ において近似的にいえることである。

が成立することを用いると

(2.168) 式の右辺第1項で

$$\begin{aligned}
& \int_0^{r_c} dr r \left(J_n^2((k_F + q_n)r) + J_{n-1}^2((k_F - q_n)r) \right) \\
&= \int_0^{r_c(k_F + q_n)} \frac{dr}{k_F + q_n} \frac{r}{k_F + q_n} J_n^2(r) + \int_0^{r_c(k_F - q_n)} \frac{dr}{k_F + q_n} \frac{r}{k_F - q_n} J_{n-1}^2(r) \\
&\sim \frac{r_c}{\pi(k_F + q_n)} + \frac{r_c}{\pi(k_F - q_n)} \\
&\sim \frac{2r_c}{\pi k_F}
\end{aligned} \tag{2.170}$$

第2項に関しては

$$a(r) \equiv k_F r + \frac{n^2 - n + 1/4}{2k_F r} - \frac{2n + 1}{4} \pi + \frac{1}{2} \psi_n(r) \tag{2.171}$$

として

$$\int_{r_c}^{\infty} dr \frac{2}{\pi k_F} e^{-2K(r)} \left\{ \cos^2 a(r) + \sin^2(a(r) - \psi(r)) \right\} \tag{2.172}$$

とかける。 $|\psi(r)| \ll 1$ から

$$\begin{aligned}
\sin^2(a + \psi) &= (\sin a \cos \psi + \cos a \sin \psi)^2 \\
&\simeq (\sin a + \cos a \psi)^2 \\
&\simeq \sin^2 a + 2 \sin a \cos a \psi \\
&= \sin^2 a + \sin 2a \psi
\end{aligned} \tag{2.173}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \int_{r_c}^{\infty} dr \frac{2}{\pi k_F} e^{-2K(r)} \left\{ \cos^2 a(r) + \sin^2(a(r) - \psi(r)) \right\} \\
&= \frac{2}{\pi k_F} \int_{r_c}^{\infty} dr e^{-2K(r)} (1 - \sin 2a(r) \psi(r))
\end{aligned}$$

上式において $a(r)$ は変化の速い関数であり、その部分を平均して評価すると

$$\sim \frac{2}{\pi k_F} \int_{r_c}^{\infty} dr e^{-2K(r)} \tag{2.174}$$

ここで

$$\Delta(r) = \Delta_{\infty} \tanh(r/\xi) = \frac{\hbar v_F}{\xi} \tanh(r/\xi)$$

を仮定すると

$$\begin{aligned}
K(r) &= \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr' \\
&= \frac{1}{\xi} \int_0^r \tanh(r'/\xi) dr' \\
&= \ln [\cosh(r/\xi)]
\end{aligned} \tag{2.175}$$

$$\int_{r_c}^{\infty} e^{-2K(r)} dr = \frac{2\xi}{1 + e^{2r_c/\xi}} \tag{2.176}$$

これから

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi k_F} \int_{r_c}^{\infty} dr e^{-2K(r)} &= \frac{2}{\pi k_F} \frac{2\xi}{1 + e^{2r_c/\xi}} \\ &\simeq \frac{4\xi}{\pi k_F} \frac{1}{2 + 2r_c/\xi} \simeq \frac{2\xi}{\pi k_F} (1 - r_c/\xi) \end{aligned} \quad (2.177)$$

となる。
以上より

$$\begin{aligned} 1 &= 2\pi |A|^2 \left[\frac{2r_c}{\pi k_F} + \frac{2\xi}{\pi k_F} (1 - r_c/\xi) \right] \\ &= \frac{4\xi |A|^2}{k_F} \end{aligned} \quad (2.178)$$

よって

$$|A|^2 = \frac{k_F}{4\xi} \quad (2.179)$$

(b)、カイラル p 波 positive vortex の場合

カイラル p 波 positive vortex に対する B-dG 方程式の解は

$$\begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{in\theta} u_n(r) \\ e^{i(n-2)\theta} v_n(r) \end{pmatrix} \quad (2.180)$$

として

• for $r < r_c$

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} J_n((k_F + q_n)r) \\ iJ_{n-2}((k_F - q_n)r) \end{pmatrix} \quad (2.181)$$

• for $r \geq r_c$

$$\begin{pmatrix} u_n(r) \\ v_n(r) \end{pmatrix} = A \sqrt{\frac{2}{\pi k_F r}} e^{-K(r)} \begin{pmatrix} \cos(k_F r + \frac{n^2 - 2n + 7/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi + \psi_n(r)) \\ -i \cos(k_F r + \frac{n^2 - 2n + 7/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi - \psi_n(r)) \end{pmatrix} \quad (2.182)$$

ここで

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr' \\ \psi_n(r) &= -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty dr' e^{2K(r) - 2K(r')} \left(E_n - \frac{(n-1)\Delta(r')}{k_F r'} - \frac{n-1}{mr'^2} \right) \\ E_n &= -(n-1)\omega_0 \end{aligned} \quad (2.183)$$

$u_n(\mathbf{r}), v_n(\mathbf{r})$ に対する規格化条件

$$\int d\mathbf{r} (u_n(\mathbf{r}) u_n^*(\mathbf{r}) + v_n(\mathbf{r}) v_n^*(\mathbf{r})) = 1 \quad (2.184)$$

を用いて A を決定する。

(2.184) 式より

$$\begin{aligned}
1 = & 2\pi|A|^2 \left[\int_0^{r_c} dr r \left(J_n^2((k_F + q_n)r) + J_{n-2}^2((k_F - q_n)r) \right) \right. \\
& + \int_{r_c}^{\infty} dr r \frac{2}{\pi k_F r} e^{-2K(r)} \left\{ \cos^2(k_F r + \frac{n^2 - 2n + 7/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi + \psi_n(r)) \right. \\
& \quad \left. \left. + \cos^2(k_F r + \frac{n^2 - 2n + 7/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi - \psi_n(r)) \right\} \right] \quad (2.185)
\end{aligned}$$

(2.185) 式の右辺第1項で (2.169) 式を用いると

$$\begin{aligned}
& \int_0^{r_c} dr r \left(J_n^2((k_F + q_n)r) + J_{n-2}^2((k_F - q_n)r) \right) \\
&= \int_0^{r_c(k_F + q_n)} \frac{dr}{k_F + q_n} \frac{r}{k_F + q_n} J_n^2(r) + \int_0^{r_c(k_F - q_n)} \frac{dr}{k_F + q_n} \frac{r}{k_F - q_n} J_{n-2}^2(r) \\
&\sim \frac{r_c}{\pi(k_F + q_n)} + \frac{r_c}{\pi(k_F - q_n)} \\
&\sim \frac{2r_c}{\pi k_F} \quad (2.186)
\end{aligned}$$

第2項に関しては

$$a(r) \equiv k_F r + \frac{n^2 - 2n + 7/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi + \psi_n(r) \quad (2.187)$$

として

$$\int_{r_c}^{\infty} dr \frac{2}{\pi k_F} e^{-2K(r)} \left\{ \cos^2 a(r) + \cos^2(a(r) - 2\psi(r)) \right\} \quad (2.188)$$

とかける。 $|\psi(r)| \ll 1$ から

$$\begin{aligned}
\cos^2(a - 2\psi) &= (\cos a \cos 2\psi + \sin a \sin 2\psi)^2 \\
&\simeq (\cos a + \sin a \cdot 2\psi)^2 \\
&\simeq \cos^2 a + 4 \sin a \cos a \psi \\
&= \cos^2 a + 2 \sin 2a \psi \quad (2.189)
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
& \int_{r_c}^{\infty} dr \frac{2}{\pi k_F} e^{-2K(r)} \left\{ \cos^2 a(r) + \cos^2(a(r) - 2\psi(r)) \right\} \\
&= \frac{2}{\pi k_F} \int_{r_c}^{\infty} dr e^{-2K(r)} (2 \cos^2 a(r) + 2 \sin 2a(r) \psi(r)) \\
&\sim \frac{2}{\pi k_F} \int_{r_c}^{\infty} dr e^{-2K(r)} \quad (2.190)
\end{aligned}$$

ここで

$$\Delta(r) = \Delta_{\infty} \tanh(r/\xi) = \frac{\hbar v_F}{\xi} \tanh(r/\xi)$$

を仮定すると (2.175)、(2.176) 式より

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\pi k_F} \frac{2\xi}{1 + e^{2r_c/\xi}} \\
&\simeq \frac{4\xi}{\pi k_F} \frac{1}{2 + 2r_c/\xi} \simeq \frac{2\xi}{\pi k_F} (1 - r_c/\xi) \quad (2.191)
\end{aligned}$$

以上より

$$\begin{aligned} 1 &= 2\pi|A|^2 \left[\frac{2r_c}{\pi k_F} + \frac{2\xi}{\pi k_F} (1 - r_c/\xi) \right] \\ &= \frac{4\xi |A|^2}{k_F} \end{aligned} \quad (2.192)$$

よって

$$|A|^2 = \frac{k_F}{4\xi} \quad (2.193)$$

(c)、カイラル p 波 negative vortex の場合

カイラル p 波 negative vortex に対する B-dG 方程式の解は

$$\begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} = A e^{in\theta} e^{-K(r)} \begin{pmatrix} H_n^{(1)}(k_F r) e^{i\psi(r)} + H_n^{(2)}(k_F r) e^{-i\psi(r)} \\ -i \{ H_n^{(1)}(k_F r) e^{-i\psi(r)} + H_n^{(2)}(k_F r) e^{i\psi(r)} \} \end{pmatrix} \quad (2.194)$$

ここで

$$\begin{aligned} K(r) &= \frac{1}{\hbar v_F} \int_0^r \Delta(r') dr' \\ \psi_n(r) &= -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty dr' e^{2K(r)-2K(r')} (E_n - \frac{n\Delta(r')}{k_F r'}) \\ E_n &= n\omega_0 \end{aligned} \quad (2.195)$$

(2.194) 式はこのままでは扱いづらいので $|n|k_F^{-1} \ll r_c \ll \xi$ となる距離 r_c を定義し

• for $r < r_c$

$$\begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \simeq A e^{in\theta} J_n(k_F r) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad (2.196)$$

• for $r \geq r_c$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_n(\mathbf{r}) \\ v_n(\mathbf{r}) \end{pmatrix} &\simeq A e^{in\theta} e^{-K(r)} J_n(k_F r) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \\ &\simeq A e^{in\theta} \sqrt{\frac{2}{\pi k_F r}} e^{-K(r)} \cos(k_F r + \frac{n^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.197)$$

としておく。¹⁸

カイラル p 波に対する規格化条件 (2.184) 式より

$$\begin{aligned} 1 &= 2\pi|A|^2 \left[\int_0^{r_c} dr r 2J_n^2(k_F r) \right. \\ &\quad \left. + \int_{r_c}^\infty dr r 2 \frac{2}{\pi k_F r} e^{-2K(r)} \cos^2(k_F r + \frac{n^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2n+1}{4}\pi) \right] \end{aligned} \quad (2.198)$$

¹⁸positevi vortex の場合と異なり、(2.195) 式の $\psi(r)$ は任意の r に対して $|\psi(r)| \ll 1$ を満たす。よって $\psi(r)$ を無視した。

ここで

$$\Delta(r) = \Delta_\infty \tanh(r/\xi) = \frac{\hbar v_F}{\xi} \tanh(r/\xi)$$

を仮定し (2.169)、(2.175)、(2.176) 式を用いると

$$\simeq 2\pi|A|^2 \left[\frac{2r_c}{\pi k_F} + \frac{2\xi}{\pi k_F} (1 - r_c/\xi) \right] \quad (2.199)$$

$$= \frac{4\xi |A|^2}{k_F} \quad (2.200)$$

よって

$$|A|^2 = \frac{k_F}{4\xi} \quad (2.201)$$

第3章 核磁気緩和率

3.1 帯磁率を用いた核磁気緩和率の表式

物質の磁氣的性質を調べる方法として核磁気共鳴（NMR）の実験がある。NMRの実験では核スピンの電子スピンの作る有効磁場をどのように感じるかを測定できる。試料を静磁場中におくと核スピンの準位はゼーマン分裂を起こし、この分裂した準位間隔に対応した高周波磁場をかけると分裂準位間の遷移が起きる。その後に高周波磁場をゼロにすると核スピンはある時間をかけて平衡状態に戻りこのときかかる時間のスケールとして核磁気緩和時間 T_1 を考えることができる。

まず核磁気緩和時間 T_1 の定義について述べる。
上向きスピンをもった粒子の数を N_+ 、下向きスピンをもった粒子の数を N_- とし

$$N = N_+ + N_-, \quad n = N_+ - N_- \quad (3.1)$$

とおく。核スピンが $\uparrow$ から $\downarrow$ に遷移する確率を $W_{+\rightarrow-}$ 、 $\downarrow$ から $\uparrow$ に遷移する確率を $W_{-\rightarrow+}$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}n &= \frac{d}{dt}N_+ - \frac{d}{dt}N_- \\ &= -N_+W_{+\rightarrow-} + N_-W_{-\rightarrow+} - (N_+W_{+\rightarrow-} - N_-W_{-\rightarrow+}) \\ &= 2(N_-W_{-\rightarrow+} - N_+W_{+\rightarrow-}) \\ &= n(W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-}) + N(W_{-\rightarrow+} - W_{+\rightarrow-}) \end{aligned} \quad (3.2)$$

ここでゼーマン分裂による状態 $\uparrow, \downarrow$ の準位間隔を ω とし、遷移確率を Boltzmann 因子で見積もると¹

$$W_{-\rightarrow+}/W_{+\rightarrow-} \sim e^{-\beta\omega} \quad (3.3)$$

であり、 $\omega \ll k_B T$ として $W_{-\rightarrow+} \sim W_{+\rightarrow-}$ といえる。

よって緩和過程の初期において（つまり $n/N \sim 1$ の時）

$$\frac{d}{dt}n = n(W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-}) \quad (3.4)$$

としてよく、これから核磁気緩和時間は

$$1/T_1 = W_{-\rightarrow+} + W_{+\rightarrow-} \quad (3.5)$$

と定義される。

次に遷移確率 $W_{-\rightarrow+}$, $W_{+\rightarrow-}$ を時間に依存する摂動論から求める。

以下の表記において任意のベクトル $\mathbf{V}$ に対し

$$V^\pm = V_x \pm iV_y \quad (3.6)$$

とかくことにする。

考えている系のハミルトニアンには外部磁場による寄与と、原子核のまわりの電子がつくる内部磁場からの寄与が存在する。外部磁場、内部磁場を $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}_{loc}$ とすると $\mathbf{H}_{loc}$ は次のようにかける。[22]

$$\mathbf{H}_{loc} = \sum_{\mathbf{q}} A_{\mathbf{q}} \{ \sigma_{\mathbf{q}}^z \hat{\mathbf{z}} + \frac{1}{2} [\sigma_{\mathbf{q}}^+ (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}) + \sigma_{\mathbf{q}}^- (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}})] \} \quad (3.7)$$

¹緩和過程は平衡状態ではないので (3.3) 式はあくまで見積もりに過ぎない。

ここで、電子の生成消滅演算子を $a_{\mathbf{k}\sigma}^*, a_{\mathbf{k}\sigma}$ として

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathbf{q}}^z &= \sum_{\mathbf{k}} \frac{1}{2} (a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^* a_{\mathbf{k}\uparrow} - a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\downarrow}^* a_{\mathbf{k}\downarrow}) \\ \sigma_{\mathbf{q}}^+ &= \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\uparrow}^* a_{\mathbf{k}\downarrow} \\ \sigma_{\mathbf{q}}^- &= \sum_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\downarrow}^* a_{\mathbf{k}\uparrow}\end{aligned}\quad (3.8)$$

また電子の波動関数を $\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 、磁気回転比を γ_e として

$$A_{\mathbf{q}} = -\frac{8\pi}{3} \gamma_e \hbar \psi_{\mathbf{q}}^*(0) \psi_{\mathbf{0}}(0) \quad (3.9)$$

であり、 $A_{\mathbf{q}}$ はフェルミ接触相互作用を表す。

内部磁場の統計平均値を $\langle \mathbf{H}_{loc} \rangle$ とおいて

$$\mathbf{H}_{loc} = \langle \mathbf{H}_{loc} \rangle + \delta \mathbf{H} \quad (3.10)$$

とかくと、全ハミルトニアンは

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_n + \mathcal{H}_e + \mathcal{H}' \quad (3.11)$$

ここで $\mathcal{H}_e$ は電子系のハミルトニアンであり、核スピンを $\hbar I$ として

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_n &= -\gamma_n \hbar \mathbf{I} \cdot (\mathbf{H} + \langle \mathbf{H}_{loc} \rangle) \equiv -\hbar \omega_n I_z \\ \mathcal{H}' &= -\gamma_n \hbar \mathbf{I} \cdot \delta \mathbf{H}\end{aligned}\quad (3.12)$$

上記の $\mathcal{H}_e$ を用いると、粒子数を N 、化学ポテンシャルを μ として

$$\langle \mathbf{H}_{loc} \rangle = \frac{\text{Tr} e^{-\beta(\mathcal{H}_e - \mu N)} \mathbf{H}_{loc}}{\text{Tr} e^{-\beta(\mathcal{H}_e - \mu N)}} \quad (3.13)$$

とかけ、(3.7) 式からすぐわかるように $\langle \mathbf{H}_{loc} \rangle$ は z 成分しか持たない。

(3.12) 式の $\mathcal{H}'$ を摂動ハミルトニアンとして計算を進めていく。

核スピンの状態を m 、電子の状態を σ で表すことにし、状態 $|m, \sigma\rangle$ から $|m', \sigma'\rangle$ への遷移確率 $W(m, \sigma \rightarrow m', \sigma')$ を摂動論から求めると

$$\begin{aligned}W(m, \sigma \rightarrow m', \sigma') &= \frac{1}{t} \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t \int_0^t dt' dt'' (m, \sigma | \mathcal{H}'(t') | m', \sigma') (m', \sigma' | \mathcal{H}'(t'') | m, \sigma) , \\ \mathcal{H}'(t) &= e^{\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}_n + \mathcal{H}_e)t} \mathcal{H}' e^{-\frac{i}{\hbar}(\mathcal{H}_n + \mathcal{H}_e)t}\end{aligned}\quad (3.14)$$

となる。(3.12)、(3.14) 式より

$$\begin{aligned}\mathcal{H}'(t) &= -\gamma_n \hbar e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_n t} \{ I_z e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_e t} \delta H_z e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_e t} \\ &\quad + \frac{1}{2} [I^+ e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_e t} \delta H^- e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_e t} + I^- e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_e t} \delta H^+ e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_e t}] \} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_n t} \\ &= -\gamma_n \hbar \{ I_z \delta H_z(t) + \frac{1}{2} [I^+ e^{-i\omega_n t} \delta H^-(t) + I^- e^{i\omega_n t} \delta H^+(t)] \}\end{aligned}\quad (3.15)$$

ただし

$$\delta \mathbf{H}(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_e t} \delta \mathbf{H} e^{-\frac{i}{\hbar}\mathcal{H}_e t} \quad (3.16)$$

よって

$$\begin{aligned}
(\downarrow, \sigma | \mathcal{H}'(t) | \uparrow, \sigma') &= (\downarrow, \sigma | -\frac{1}{2}\gamma_n \hbar I^- e^{i\omega_n t} \delta H^+(t) | \uparrow, \sigma') \\
&= -\frac{1}{2}\gamma_n \hbar e^{i\omega_n t} (\sigma | \delta H^+(t) | \sigma')
\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\begin{aligned}
(\uparrow, \sigma' | \mathcal{H}'(t) | \downarrow, \sigma) &= (\uparrow, \sigma' | -\frac{1}{2}\gamma_n \hbar I^+ e^{-i\omega_n t} \delta H^+(t) | \downarrow, \sigma) \\
&= -\frac{1}{2}\gamma_n \hbar e^{-i\omega_n t} (\sigma' | \delta H^-(t) | \sigma)
\end{aligned} \tag{3.18}$$

これを (3.14) 式に代入して

$$W(\downarrow, \sigma \rightarrow \uparrow, \sigma') = \frac{1}{t} \frac{\gamma_n^2}{4} \int_0^t \int_0^t dt' dt'' e^{i\omega_n(t''-t')} (\sigma | \delta H^-(t') | \sigma') (\sigma' | \delta H^+(t'') | \sigma) \tag{3.19}$$

となる。

これから $W_{+\rightarrow-}$ を求めるには、(3.19) 式に Boltzmann 因子をかけて状態 σ, σ' に関する和をとればよい。

$$\mathcal{H}_e |\sigma\rangle = E_\sigma |\sigma\rangle, \quad Z = \sum_\sigma e^{-\beta E_\sigma} \tag{3.20}$$

として

$$\begin{aligned}
W_{+\rightarrow-} &= \sum_{\sigma, \sigma'} \frac{e^{-\beta E_\sigma}}{Z} \frac{1}{t} \frac{\gamma_n^2}{4} \int_0^t \int_0^t dt' dt'' e^{i\omega_n(t''-t')} (\sigma | \delta H^-(t') | \sigma') (\sigma' | \delta H^+(t'') | \sigma) \\
&= \frac{1}{t} \frac{\gamma_n^2}{4} \int_0^t \int_0^t dt' dt'' e^{i\omega_n(t''-t')} \langle \delta H^-(t') \delta H^+(t'') \rangle
\end{aligned} \tag{3.21}$$

ここで

$$\langle \delta H^-(t') \delta H^+(t'') \rangle \equiv \sum_\sigma \frac{e^{-\beta E_\sigma}}{Z} (\sigma | \delta H^-(t') \delta H^+(t'') | \sigma) \tag{3.22}$$

上記の量は内部磁場のゆらぎに対する相関関数であり

$$\langle \delta H^-(t') \delta H^+(t'') \rangle = \langle \delta H^-(t' - t'') \delta H^+(0) \rangle \tag{3.23}$$

が成立する。 よって $t' - t'' = \tau$ として

$$\begin{aligned}
W_{+\rightarrow-} &= \frac{1}{t} \frac{\gamma_n^2}{4} \int_0^t \int_0^t dt' dt'' e^{-i\omega_n \tau} \langle \delta H^-(\tau) \delta H^+(0) \rangle \\
&= \frac{1}{t} \frac{\gamma_n^2}{4} \left[\int_0^t d\tau \int_0^{t-\tau} dt'' e^{-i\omega_n \tau} \langle \delta H^-(\tau) \delta H^+(0) \rangle \right. \\
&\quad \left. + \int_{-t}^0 d\tau \int_{-\tau}^t dt'' e^{-i\omega_n \tau} \langle \delta H^-(\tau) \delta H^+(0) \rangle \right] \\
&= \frac{\gamma_n^2}{4} \int_{-t}^t d\tau e^{-i\omega_n \tau} \langle \delta H^-(\tau) \delta H^+(0) \rangle \\
&\quad - \frac{\gamma_n^2}{4} \frac{1}{t} \int_0^t d\tau \tau [e^{-i\omega_n \tau} \langle \delta H^-(\tau) \delta H^+(0) \rangle + e^{i\omega_n \tau} \langle \delta H^-(0) \delta H^+(\tau) \rangle]
\end{aligned}$$

ここで相関関数 $\langle \delta H^-(0) \delta H^+(\tau) \rangle$ の減衰時間に比べて t が十分大きいとすると第2項は無視でき、

$$\simeq \frac{\gamma_n^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega_n \tau} \langle \delta H^-(\tau) \delta H^+(0) \rangle \tag{3.24}$$

を得る。

同様にして $W_{-\rightarrow+}$ を求めると

$$W_{-\rightarrow+} = \frac{\gamma_n^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle \delta H^+(\tau) \delta H^-(0) \rangle \quad (3.25)$$

以上より

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} &= W_{+\rightarrow-} + W_{-\rightarrow+} \\ &= \frac{\gamma_n^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega_n \tau} \langle \{ \delta H^-(\tau), \delta H^+(0) \} \rangle \end{aligned} \quad (3.26)$$

ここで $\{, \}$ は反交換子である。(3.7)、(3.10) 式を用い、 $\langle H_{x\,eq} \rangle = 0$, $\langle H_{y\,eq} \rangle = 0$ に注意すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_1} &= \frac{\gamma_n^2}{4} \sum_{\mathbf{q}, \mathbf{q}'} A_{\mathbf{q}} A_{\mathbf{q}'} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega_n \tau} \langle \{ \sigma_{\mathbf{q}}^-(\tau), \sigma_{\mathbf{q}'}^+(0) \} \rangle \\ &= \frac{\gamma_n^2}{4} \sum_{\mathbf{q}} A_{\mathbf{q}} A_{-\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega_n \tau} \langle \{ \sigma_{\mathbf{q}}^-(\tau), \sigma_{-\mathbf{q}}^+(0) \} \rangle \end{aligned} \quad (3.27)$$

ここで $\langle \sigma_{\mathbf{q}'}^+(\tau) \sigma_{\mathbf{q}}^-(0) \rangle = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \langle a_{\mathbf{k}'+\mathbf{q}\uparrow}^* a_{\mathbf{k}\downarrow} a_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\downarrow}^* a_{\mathbf{k}\uparrow} \rangle$ であり、運動量が保存しないとゼロになることを用いた。

次に (3.27) 式右边を帯磁率により表す。

線形応答理論より、系に摂動ハミルトニアン $\mathcal{H}_{ex}(t) = \hat{A} e^{-i\omega t}$ が加えられたときの物理量 B の応答は

$$B(t) - B_{eq} = i e^{-i\omega t} \int_0^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \langle [\hat{B}(t'), \hat{A}] \rangle \quad (3.28)$$

で与えられる。ここで B_{eq} は摂動ハミルトニアンがない時の B の熱平衡量であり、 $[\ , \]$ は交換子である。また全ハミルトニアンを $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{ex}$ として

$$\hat{B}(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t} \hat{B} e^{-\frac{i}{\hbar} \mathcal{H}_0 t} \quad (3.29)$$

とした。

外部磁場を $\mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t}$ 、磁化密度を $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ として

$$B = M_j(\mathbf{r}),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{ex} &= - \int d\mathbf{r} \mathbf{M}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{H}(\mathbf{r}) e^{-i\omega t} \\ &= - \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \sum_i \int d\mathbf{r} M_i(\mathbf{k}) H_i(\mathbf{k}') e^{i\mathbf{r} \cdot (\mathbf{k} - \mathbf{k}')} e^{-i\omega t} \\ &= - \sum_{\mathbf{k}} \sum_i M_i(-\mathbf{k}) H_i(\mathbf{k}) e^{-i\omega t} \end{aligned} \quad (3.30)$$

とおく。ただし $i = x, y, z$ は方向を表す。

いま外部磁場は j 成分しか持たないとする

$$\hat{A} = \sum_{\mathbf{k}} M_j(-\mathbf{k}) H_j(\mathbf{k}) \quad (3.31)$$

(3.28) 式より

$$\begin{aligned} \Delta M_i(\mathbf{q}, t) &\equiv M_i(\mathbf{q}, t) - M_{i\,eq} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\omega t} H_j(\mathbf{k}) \times i \int_0^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \langle [M_i(\mathbf{q}, t'), M_j(-\mathbf{k})] \rangle \\ &= e^{-i\omega t} H_j(\mathbf{q}') \times i \int_0^{\infty} dt' e^{i\omega t'} \langle [M_i(\mathbf{q}, t'), M_j(-\mathbf{q}')] \rangle \end{aligned} \quad (3.32)$$

ここで $[M_i(\mathbf{q}, t'), M_j(-\mathbf{k})] \propto [\sigma_{\mathbf{q}}^i(t'), \sigma_{-\mathbf{k}}^j]$ であり、運動量保存をみたすような $\mathbf{k}$ 以外ではゼロになる。そのような $\mathbf{k}$ は $\mathbf{q}$ により決定され、それを $\mathbf{q}'$ とおいた。

これから帯磁率を $\chi_{i,j}(\mathbf{q}, \omega) = \frac{\Delta M_i(\mathbf{q}, t)}{e^{-i\omega t} H_j(\mathbf{q})}$ と定義すると

$$\chi_{i,j}(\mathbf{q}, \omega) = i \int_0^\infty dt' e^{i\omega t'} \langle [M_i(\mathbf{q}, t'), M_j(-\mathbf{q}')] \rangle \quad (3.33)$$

と表される。

ここで A, B を任意の物理量として

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle A(t) B \rangle &= \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \sum_{\sigma, \sigma'} \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\sigma} e^{i(E_\sigma - E_{\sigma'})t} \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{\sigma, \sigma'} e^{-\beta E_\sigma} \int_0^\infty dt e^{i\{(E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega) - \delta\}t} \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \\ &= \frac{i}{Z} \sum_{\sigma, \sigma'} \frac{e^{-\beta E_\sigma}}{E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega + i\delta} \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \\ &= \frac{i}{Z} \sum_{\sigma, \sigma'} e^{-\beta E_\sigma} \left(P \frac{1}{E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega} - i\pi \delta(E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega) \right) \\ &\quad \times \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle B A(t) \rangle &= \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \sum_{\sigma, \sigma'} \frac{1}{Z} e^{-\beta E_\sigma} e^{-i(E_\sigma - E_{\sigma'})t} \langle \sigma | B | \sigma' \rangle \langle \sigma' | A | \sigma \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \sum_{\sigma, \sigma'} e^{-\beta E_{\sigma'}} e^{i(E_\sigma - E_{\sigma'})t} \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{\sigma, \sigma'} \int_0^\infty dt e^{-\beta E_{\sigma'}} e^{i\{(E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega) - \delta\}t} \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \\ &= \frac{i}{Z} \sum_{\sigma, \sigma'} \frac{e^{-\beta E_{\sigma'}}}{E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega + i\delta} \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \\ &= \frac{i}{Z} \sum_{\sigma, \sigma'} e^{-\beta E_{\sigma'}} \left(P \frac{1}{E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega} - i\pi \delta(E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega) \right) \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \\ &= \frac{i}{Z} \sum_{\sigma, \sigma'} \left(P \frac{e^{-\beta E_{\sigma'}}}{E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega} - i\pi e^{-\beta E_\sigma} e^{-\beta\omega} \delta(E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega) \right) \\ &\quad \times \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \end{aligned} \quad (3.35)$$

が成立する。上式で δ は正の微少量であり積分の発散を抑えるために導入した。

同様にして

$$\int_{-\infty}^\infty dt e^{i\omega t} \langle A(t) B \rangle = \frac{2\pi}{Z} \sum_{\sigma, \sigma'} e^{-\beta E_\sigma} \delta(E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega) \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \quad (3.36)$$

$$\int_{-\infty}^\infty dt e^{i\omega t} \langle B A(t) \rangle = \frac{2\pi}{Z} \sum_{\sigma, \sigma'} e^{-\beta E_\sigma} e^{-\beta\omega} \delta(E_\sigma - E_{\sigma'} + \omega) \langle \sigma | A | \sigma' \rangle \langle \sigma' | B | \sigma \rangle \quad (3.37)$$

(3.34) ~ (3.37) 式より

$$\text{Im} \left[i \int_0^\infty dt e^{i\omega t} \langle [A(t), B] \rangle \right] = \frac{1 - e^{-\beta\omega}}{2} \int_{-\infty}^\infty dt e^{i\omega t} \langle A(t) B \rangle, \quad (3.38)$$

$$\int_{-\infty}^\infty dt e^{i\omega t} \langle B A(t) \rangle = e^{-\beta\omega} \int_{-\infty}^\infty dt e^{i\omega t} \langle A(t) B \rangle \quad (3.39)$$

よって

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle \{ \sigma_{\mathbf{q}}^-(\tau), \sigma_{-\mathbf{q}}^+(0) \} \rangle &= (1 + e^{-\beta\omega_n}) \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle \sigma_{\mathbf{q}}^-(\tau) \sigma_{-\mathbf{q}}^+(0) \rangle \\
&= \frac{2(1 + e^{-\beta\omega_n})}{1 - e^{-\beta\omega_n}} \text{Im} \left[i \int_0^{\infty} d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle [\sigma_{\mathbf{q}}^-(\tau), \sigma_{-\mathbf{q}}^+(0)] \rangle \right]
\end{aligned} \tag{3.40}$$

電子の運動における緩和時間が核スピンの緩和時間に比べて十分短いことを考えると、(3.40) 式の積分で $\sin(\omega\tau)$ の項は $\cos(\omega\tau)$ の項に比べて無視でき

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{2(1 + e^{-\beta\omega_n})}{1 - e^{-\beta\omega_n}} \text{Im} \left[i \int_0^{\infty} d\tau \cos(\omega_n \tau) \langle [\sigma_{\mathbf{q}}^-(\tau), \sigma_{-\mathbf{q}}^+(0)] \rangle \right] \\
&\simeq \frac{4}{\beta\omega_n} \text{Im} \left[i \int_0^{\infty} d\tau \cos(\omega_n \tau) \langle [\sigma_{\mathbf{q}}^-(\tau), \sigma_{-\mathbf{q}}^+(0)] \rangle \right]
\end{aligned} \tag{3.41}$$

ここで $\omega_n \ll k_B T$ とした。

一方、(3.33) 式より適当な成分を選んで

$$\chi_{-,+}(\mathbf{q}, \omega_n) \equiv i \int_0^{\infty} dt e^{i\omega_n t} \langle [M^-(\mathbf{q}, t), M^+(-\mathbf{q}')] \rangle \tag{3.42}$$

電子の磁化は $\mathbf{M}(\mathbf{q}) = \frac{\gamma_e \hbar}{2} \boldsymbol{\sigma}_{\mathbf{q}}$ と与えられるので

$$\begin{aligned}
\langle [M^-(\mathbf{q}, t), M^+(-\mathbf{q}')] \rangle &= \frac{\gamma_e^2 \hbar^2}{4} \langle [\sigma_{\mathbf{q}}^-(t), \sigma_{-\mathbf{q}'}^+] \rangle \\
&= \frac{\gamma_e^2 \hbar^2}{4} \langle [\sigma_{\mathbf{q}}^-(t), \sigma_{-\mathbf{q}}^+] \rangle
\end{aligned} \tag{3.43}$$

よって

$$\begin{aligned}
\chi_{-,+}(\mathbf{q}, \omega_n) &= \frac{\gamma_e^2 \hbar^2}{4} i \int_0^{\infty} dt e^{i\omega_n t} \langle [\sigma_{\mathbf{q}}^-(t), \sigma_{-\mathbf{q}}^+] \rangle \\
&\simeq \frac{\gamma_e^2 \hbar^2}{4} i \int_0^{\infty} dt \cos(\omega_n t) \langle [\sigma_{\mathbf{q}}^-(t), \sigma_{-\mathbf{q}}^+] \rangle
\end{aligned} \tag{3.44}$$

(3.41)、(3.44) 式より

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle \{ \sigma_{\mathbf{q}}^-(\tau), \sigma_{-\mathbf{q}}^+(0) \} \rangle = \frac{16}{\hbar^2 \gamma_e^2 \beta \omega_n} \text{Im} \chi_{-,+}(\mathbf{q}, \omega_n) \tag{3.45}$$

これを (3.27) 式に代入して

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_1} &= \frac{\gamma_n^2}{4} \sum_{\mathbf{q}} A_{\mathbf{q}} A_{-\mathbf{q}} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-i\omega_n \tau} \langle \{ \sigma_{\mathbf{q}}^-(\tau), \sigma_{-\mathbf{q}}^+(0) \} \rangle \\
&= \frac{4\gamma_n^2}{\hbar^2 \gamma_e^2 \beta \omega_n} \sum_{\mathbf{q}} A_{\mathbf{q}} A_{-\mathbf{q}} \text{Im} \chi_{-,+}(\mathbf{q}, \omega_n)
\end{aligned} \tag{3.46}$$

を得る。とくに $A_{\mathbf{q}}$ の波数依存性が無視できるときは

$$\begin{aligned}
\frac{1}{T_1} &= \frac{4\gamma_n^2}{\hbar^2 \gamma_e^2 \beta \omega_n} A^2 \sum_{\mathbf{q}} \text{Im} \chi_{-,+}(\mathbf{q}, \omega_n) \\
&= \frac{4\gamma_n^2}{\hbar^2 \gamma_e^2 \beta \omega_n} A^2 \text{Im} \chi_{-,+}(\mathbf{r} = 0, \omega_n)
\end{aligned} \tag{3.47}$$

となる。

3.2 確率振幅 u_n 、 v_n による表式

核磁気緩和率を

$$R(\mathbf{r}) = \frac{1}{\beta} \lim_{\Omega \rightarrow 0} \text{Im} \chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\Omega_n \rightarrow \Omega + i\delta) / \Omega \quad (3.48)$$

とする。²ここで $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau) = \langle T \sigma^-(\mathbf{r}, \tau) \sigma^+(\mathbf{r}', \tau') \rangle$, $\Omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}$ であり、 $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \tau) = e^{\tau \mathcal{H}} \chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-\tau \mathcal{H}}$ は帯磁率 $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ の虚時間を用いた相互作用表示である。前節の (3.47) 式と比べると因子 $\frac{4\gamma_n^2 A^2}{\hbar^2 \gamma_e^2 \omega_n}$ (A は電子-核スピン間相互作用における超微細相互作用定数であり、 ω_n は核スピンの共鳴周波数である。) だけ異なるが、この因子は超伝導転移において変化しない定数なので省いた。後のページで核磁気緩和率を結果として出力する際、転移温度における正常状態での値で規格化するためこの省略による影響はうけない。 $\chi(\mathbf{r}, \tau; \mathbf{r}', \tau')$ は T 積が用いられていることからわかるように温度 Green 関数であり、以下の作業で $i\Omega_n \rightarrow \Omega + i\delta$ と解析接続して遅延 Green 関数に直し物理量を求めていく。

まず $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\Omega_n)$ について考える。

Wick の定理を使うと

$$\begin{aligned} \chi(x, x') &= \langle T \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \psi_{\uparrow}(x) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x') \psi_{\downarrow}(x') \rangle \\ &= \langle T \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \psi_{\downarrow}(x') \rangle \langle T \psi_{\uparrow}(x) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x') \rangle - \langle T \psi_{\downarrow}^{\dagger}(x) \psi_{\uparrow}^{\dagger}(x') \rangle \langle T \psi_{\uparrow}(x) \psi_{\downarrow}(x') \rangle \\ &= -G(x', x) G(x, x') - F^{\dagger}(x, x') F(x, x') \end{aligned} \quad (3.49)$$

よって

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\Omega_n) &\equiv \int_0^{\beta} d(\tau - \tau') e^{i\Omega_n(\tau - \tau')} \chi(x, x') \\ &= -\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_m} \left\{ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\omega_m) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\Omega_n - i\omega_m) + F^{\dagger}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\omega_m) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\Omega_n - i\omega_m) \right\} \\ &= -\frac{1}{\beta} \sum_{\omega_m} \left\{ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\omega_m) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\Omega_n i - \omega_m) \pm F^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\omega_m) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\Omega_n - i\omega_m) \right\} \end{aligned} \quad (3.50)$$

ここで + の符号は S 波の、- の符号はカイラル p 波の表式になっている。

以下、複号を用いる時上側を S 波に下側をカイラル p 波に対応させることにする。

Green 関数を $u_n(\mathbf{r}), v_n(\mathbf{r})$ で表すと

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}, \mathbf{r}', i\omega_n) &= \sum_l \left[\frac{u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}')}{i\omega_n - \varepsilon_l} + \frac{v_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}')}{i\omega_n + \varepsilon_l} \right] \\ F(\mathbf{r}, \mathbf{r}', i\omega_n) &= \sum_l \left[-\frac{u_l(\mathbf{r}) v_l^*(\mathbf{r}')}{i\omega_n - \varepsilon_l} \pm \frac{v_l^*(\mathbf{r}) u_l(\mathbf{r}')}{i\omega_n + \varepsilon_l} \right] \end{aligned} \quad (3.51)$$

これを (3.49) 式に代入して

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\Omega_n) &= \frac{1}{\beta} \sum_m \left\{ \sum_{l, l'} \left[\frac{u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}')}{i\omega_m - \varepsilon_l} + \frac{v_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}')}{i\omega_m + \varepsilon_l} \right] \left[\frac{u_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}')}{i\omega_m - i\Omega_n - \varepsilon_{l'}} + \frac{v_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}')}{i\omega_m - i\Omega_n + \varepsilon_{l'}} \right] \right. \\ &\quad \left. \pm \sum_{l, l'} \left[\frac{u_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}')}{i\omega_m + \varepsilon_l} \mp \frac{v_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}')}{i\omega_m - \varepsilon_l} \right] \left[\frac{u_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}(\mathbf{r}')}{i\omega_m - i\Omega_n + \varepsilon_{l'}} \mp \frac{v_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}')}{i\omega_m - i\Omega_n - \varepsilon_{l'}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

(3.52) 式の $\sum_m$ を実行するには以下の公式を用いる。

$$\sum_n F(i\omega_n) = -\frac{\beta}{2\pi i} \oint_c d\omega \frac{F(\omega)}{e^{\beta\omega} + 1} \quad (3.53)$$

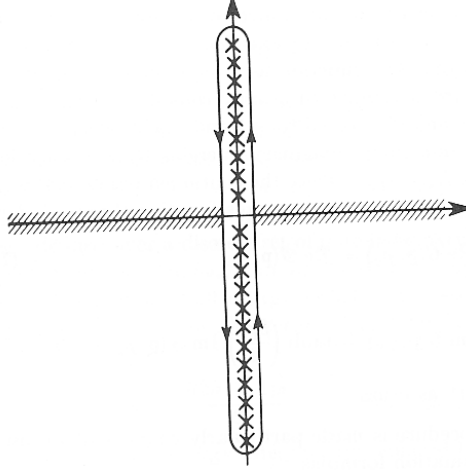


図 3.1: (3.53) 式の積分における経路

c は図 3.1 に示した経路である。

これより $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$ とし、 $f(\mathbf{r})$ をフェルミ分布関数とすると

$$\begin{aligned}
\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\Omega_n) = & \sum_{l, l'} \left\{ u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) u_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) \left[\frac{f(\varepsilon_l)}{\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} - i\Omega_n} + \frac{f(\varepsilon_{l'})}{-\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} + i\Omega_n} \right] \right. \\
& + u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) v_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) \left[\frac{f(\varepsilon_l)}{\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} - i\Omega_n} + \frac{f(-\varepsilon_{l'})}{-\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} + i\Omega_n} \right] \\
& + v_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}) u_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) \left[\frac{f(-\varepsilon_l)}{-\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} - i\Omega_n} + \frac{f(\varepsilon_{l'})}{\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} + i\Omega_n} \right] \\
& + v_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}) v_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) \left[\frac{f(-\varepsilon_l)}{-\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} - i\Omega_n} + \frac{f(-\varepsilon_{l'})}{\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} + i\Omega_n} \right] \\
& \pm u_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) \left[\frac{f(-\varepsilon_l)}{-\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} - i\Omega_n} + \frac{f(-\varepsilon_{l'})}{\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} + i\Omega_n} \right] \\
& - u_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) \left[\frac{f(-\varepsilon_l)}{-\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} - i\Omega_n} + \frac{f(\varepsilon_{l'})}{\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} + i\Omega_n} \right] \\
& - v_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) \left[\frac{f(\varepsilon_l)}{\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} - i\Omega_n} + \frac{f(-\varepsilon_{l'})}{-\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} + i\Omega_n} \right] \\
& \left. \pm v_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) \left[\frac{f(\varepsilon_l)}{\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} - i\Omega_n} + \frac{f(\varepsilon_{l'})}{-\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} + i\Omega_n} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{3.54}$$

となる。 ここで

$$f(\varepsilon_l + i\Omega_n) = f(\varepsilon_l) \tag{3.55}$$

を用いた。

次に、(3.54) 式を $i\Omega_n \rightarrow \omega + i\delta$ と解析接続する。

$$\frac{1}{x + i\delta} = P \frac{1}{x} - i\pi\delta(x) \tag{3.56}$$

²この表式で $\mathbf{r}$ 依存性が存在するのは系の並進対称性が破れているからである。3.1 節で波数 $\mathbf{q}$ を相対座標に対する量として設定すれば同じ議論ができる。そのとき重心座標に関する空間依存性が残ることになる。

を使うと

$$\begin{aligned}
& \text{Im}\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\Omega_n \rightarrow \Omega + i\delta)/\Omega \\
&= \frac{\pi}{\Omega} \sum_{l, l'} \left\{ u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) u_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} - \Omega) (f(\varepsilon_l) - f(\varepsilon_{l'})) \right. \\
&\quad + u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) v_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} - \Omega) (f(\varepsilon_l) - f(-\varepsilon_{l'})) \\
&\quad + v_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}) u_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} + \Omega) (f(-\varepsilon_l) - f(\varepsilon_{l'})) \\
&\quad + v_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}) v_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} + \Omega) (f(-\varepsilon_l) - f(-\varepsilon_{l'})) \\
&\quad \pm u_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} + \Omega) (f(-\varepsilon_l) - f(-\varepsilon_{l'})) \\
&\quad - u_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} + \Omega) (f(-\varepsilon_l) - f(\varepsilon_{l'})) \\
&\quad - v_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l + \varepsilon_{l'} - \Omega) (f(\varepsilon_l) - f(-\varepsilon_{l'})) \\
&\quad \left. \pm v_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} - \Omega) (f(\varepsilon_l) - f(\varepsilon_{l'})) \right\}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

上の式で $\varepsilon_l \geq 0$ であり、最後に $\Omega \rightarrow 0$ にもっていくことを考慮すると
いくつかのデルタ関数はゼロになり

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{\Omega} \sum_{l, l'} \left\{ u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) u_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} - \Omega) (f(\varepsilon_l) - f(\varepsilon_{l'})) \right. \\
&\quad + v_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}) v_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} + \Omega) (f(-\varepsilon_l) - f(-\varepsilon_{l'})) \\
&\quad \pm u_l^*(\mathbf{r}) v_l(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} + \Omega) (f(-\varepsilon_l) - f(-\varepsilon_{l'})) \\
&\quad \left. \pm v_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) v_{l'}^*(\mathbf{r}) u_{l'}(\mathbf{r}) \delta(\varepsilon_l - \varepsilon_{l'} - \Omega) (f(\varepsilon_l) - f(\varepsilon_{l'})) \right\}
\end{aligned} \tag{3.58}$$

さらに $f(-\varepsilon) = 1 - f(\varepsilon)$ を用い、dummy index をいれかえると

$$\begin{aligned}
&= \pi \sum_{l, m} \delta(\varepsilon_l - \varepsilon_m - \Omega) \frac{f(\varepsilon_l) - f(\varepsilon_m)}{\Omega} \\
&\quad \left\{ |u_l(\mathbf{r})|^2 |u_m(\mathbf{r})|^2 + |v_l(\mathbf{r})|^2 |v_m(\mathbf{r})|^2 \pm u_l(\mathbf{r}) v_l^*(\mathbf{r}) u_m^*(\mathbf{r}) v_m(\mathbf{r}) \pm v_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) v_m^*(\mathbf{r}) u_m(\mathbf{r}) \right\}
\end{aligned} \tag{3.59}$$

ここで ε を任意のエネルギー準位として、クロネッカーのデルタ関数を用いた恒等式³ $1 = \sum_{\varepsilon} \delta_{\varepsilon, \varepsilon_l}$ を挿入する。

$$\begin{aligned}
& \text{Im}\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\Omega_n \rightarrow \Omega + i\delta)/\Omega \\
&= \pi \sum_{\varepsilon, \varepsilon'} \delta(\varepsilon - \varepsilon' + \Omega) \frac{f(\varepsilon) - f(\varepsilon')}{\Omega} \sum_{l, m} \delta_{\varepsilon_l, \varepsilon} \delta_{\varepsilon_m, \varepsilon'} |u_l(\mathbf{r}) u_m^*(\mathbf{r}) \pm v_l(\mathbf{r}) v_m^*(\mathbf{r})|^2 \\
&\xrightarrow{\Omega \rightarrow 0} \pi \sum_{\varepsilon, \varepsilon'} \delta(\varepsilon - \varepsilon') (-f'(\varepsilon)) \sum_{l, m} \delta_{\varepsilon_l, \varepsilon} \delta_{\varepsilon_m, \varepsilon} |u_l(\mathbf{r}) u_m^*(\mathbf{r}) \pm v_l(\mathbf{r}) v_m^*(\mathbf{r})|^2
\end{aligned} \tag{3.60}$$

³ $\sum_{\varepsilon}$ において縮退による重複は考慮しない。

よって

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\beta} \lim_{\Omega \rightarrow 0} \text{Im} \chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\Omega_n \rightarrow \Omega + i\delta)/\Omega \\
&= \frac{\pi}{\beta} \sum_{\varepsilon, \varepsilon'} \delta(\varepsilon - \varepsilon') (-f'(\varepsilon)) \sum_{l,m} \delta_{\varepsilon_l, \varepsilon} \delta_{\varepsilon_m, \varepsilon} |u_l(\mathbf{r})u_m^*(\mathbf{r}) \pm v_l(\mathbf{r})v_m^*(\mathbf{r})|^2 \\
&= \frac{\pi}{4} \sum_{\varepsilon, \varepsilon'} \delta(\varepsilon - \varepsilon') \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \sum_{l,m} \delta_{\varepsilon_l, \varepsilon} \delta_{\varepsilon_m, \varepsilon} |u_l(\mathbf{r})u_m^*(\mathbf{r}) \pm v_l(\mathbf{r})v_m^*(\mathbf{r})|^2 \\
&\quad + \dots \text{for } s \text{ wave} \\
&\quad - \dots \text{for chiral } p \text{ wave}
\end{aligned} \tag{3.61}$$

2.4 節で示したように S 波 vortex と p 波 vortex の励起エネルギーは離散的になり、そのときの準位間隔は ω_0 で与えられた。(3.61) 式の $\sum_{\varepsilon}$ は離散的な和であるが近似的に ε を連続な値として扱うことにすると

$$\begin{aligned}
\sum_{\varepsilon} &= \sum_{0 \leq \varepsilon n \leq \Delta_{\infty}} \\
&= \frac{1}{\omega_0} \sum_{0 \leq \varepsilon n \leq \Delta_{\infty}} d\varepsilon \sim \frac{1}{\omega_0} \int_0^{\Delta_{\infty}} d\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.62}$$

これを用いると

$$\begin{aligned}
R(\mathbf{r}) &= \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\Delta_{\infty}} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \sum_{l,m} \delta_{\varepsilon_l, \varepsilon} \delta_{\varepsilon_m, \varepsilon} |u_l(\mathbf{r})u_m^*(\mathbf{r}) \pm v_l(\mathbf{r})v_m^*(\mathbf{r})|^2 \\
&\quad + \dots \text{for } s \text{ wave} \\
&\quad - \dots \text{for chiral } p \text{ wave}
\end{aligned} \tag{3.63}$$

を得る。

3.3 核磁気緩和率の導出

3.3.1 S 波 vortex の場合

S 波 vortex に対する磁気緩和率は

$$A(r, \varepsilon) \equiv \sum_{n,m} \delta_{\varepsilon_n, \varepsilon} \delta_{\varepsilon_m, \varepsilon} |u_n(\mathbf{r}) u_m^*(\mathbf{r}) + v_n(\mathbf{r}) v_m^*(\mathbf{r})|^2 \quad (3.64)$$

として

$$R(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\Delta_\infty} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} A(r, \varepsilon) \quad (3.65)$$

と与えられる。

S 波 vortex のエネルギー準位は $E_n = -(n - \frac{1}{2})\omega_0$ であり、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E_{-l} \\ &= (l + 1/2)\omega_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.66)$$

として

$$A(r, \varepsilon) = |u_{-l}(\mathbf{r}) u_{-l}^*(\mathbf{r}) + v_{-l}(\mathbf{r}) v_{-l}^*(\mathbf{r})|^2 \quad (3.67)$$

とかける。

$u_l(\mathbf{r}), v_l(\mathbf{r})$ の表式を代入すると

$r < r_c$ で

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{J_{-l}^2((k_F + q_{-l})r) + J_{-l-1}^2((k_F - q_{-l})r)\}^2 \\ &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{J_l^2((k_F + q_{-l})r) + J_{l+1}^2((k_F - q_{-l})r)\}^2 \end{aligned} \quad (3.68)$$

$r > r_c$ で

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \left| \frac{k_F}{4\xi} \frac{2}{\pi k_F r} e^{-2K(r)} \left\{ \cos^2 \left(k_F r + \frac{l^2 + l + 1/4}{2k_F r} - \frac{-2l + 1}{4} \pi + \frac{1}{2} \psi(r) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2 \left(k_F r + \frac{l^2 + l + 1/4}{2k_F r} - \frac{-2l + 1}{4} \pi - \frac{1}{2} \psi(r) \right) \right\} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.69)$$

(3.65) 式のように緩和率を求める場合 $\int d\varepsilon$ を行うことになり、 $A(r, \varepsilon)$ を ε の関数として捉えることが必要になる。 r_c は $|l + 1/2| k_F \ll r_c \ll \xi$ のように定義されており、 l 依存性（つまり ε 依存性）をもつ。よって r_c に対応するエネルギーとして ε_c を考えることができる。条件 $r < r_c$, $r > r_c$ がどのエネルギー領域に対応するかを考えると

$$r < r_c \implies \varepsilon > \varepsilon_c, \quad r > r_c \implies \varepsilon < \varepsilon_c \quad (3.70)$$

とできる。(図 3.2 参照。)

r を固定したときの $A(r, \varepsilon)$ の振る舞いを示すと図 3.3 のようになる。

(3.68)、(3.69) の表式では波数 k_F 程度の激しい振動が存在するが、これを平均化して扱うことを以下で試みる。

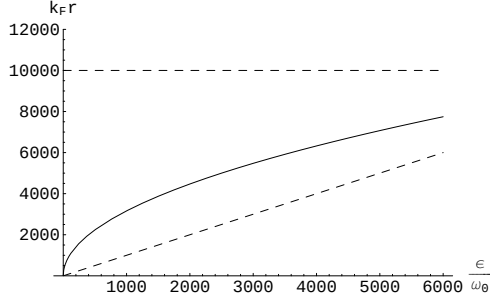


図 3.2: $r = r_c$ の ε に関する変化
ここでは $\xi = 10000k_F^{-1}$ の時の r_c を見積もった。点線は各々 $r = \frac{\varepsilon}{\omega_0}k_F$ 、 $r = \xi$ を表す。

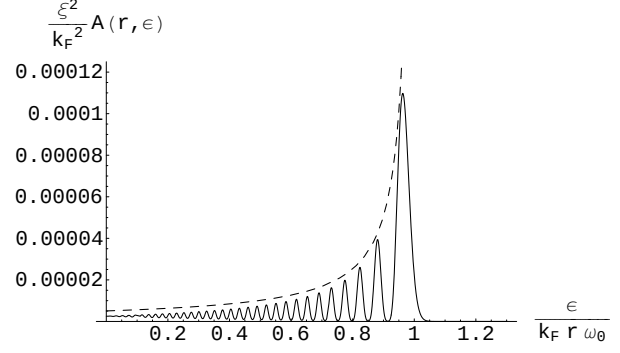


図 3.3: S 波 vortex における $A(r, \varepsilon)$ の ε 依存性
($r = 100k_F^{-1}$)
点線は包絡線を表す。このグラフで $\frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0} < 1$ の領域
([2 -] の場合に対応) と $\frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0} > 1$ の領域 ([2 -
] の場合に対応) に分けて議論を進めていく。

[1] $\varepsilon < \varepsilon_c$ に関して

$$f(r) = k_F r + \frac{l^2 + l + 1/4}{2k_F r} - \frac{-2l + 1}{4}\pi \quad (3.71)$$

とすると、(3.69) 式の { } は

$$\begin{aligned} & \left\{ \cos^2\left(f(r) + \frac{1}{2}\psi(r)\right) + \sin^2\left(f(r) - \frac{1}{2}\psi(r)\right) \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2}[1 + \cos(2f(r) + \psi(r))] + \frac{1}{2}[1 - \cos(2f(r) - \psi(r))] \right\}^2 \\ &= \left\{ 1 + \frac{1}{2}[\cos(2f(r) + \psi(r)) - \cos(2f(r) - \psi(r))] \right\}^2 \\ &= \{1 - \sin 2f(r) \sin \psi(r)\}^2 \\ &= 1 - 2 \sin 2f(r) \sin \psi(r) + \sin^2 2f(r) \sin^2 \psi(r) \end{aligned} \quad (3.72)$$

ここで $f(r)$ は k_F^{-1} 程度で激しく変動する関数であり、 $\psi(r)$ は ξ 程度で緩やかに変化する関数である。
このことから

$$\longrightarrow 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \psi(r) \sim 1 + \frac{1}{2} \psi^2(r) \quad (3.73)$$

とできる。

よって

$$A(r, \varepsilon) = \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{2} \psi^2(r)\right) \quad \text{for } \varepsilon < \varepsilon_c \quad (3.74)$$

[2] $\varepsilon > \varepsilon_c$ に関して

(3.68) 式より

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{J_l^2((k_F + q_{-l})r) + J_{l+1}^2((k_F - q_{-l})r)\}^2 \\ &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{J_{\varepsilon/\omega_0-1/2}^2((k_F + q_{-l})r) + J_{\varepsilon/\omega_0+1/2}^2((k_F - q_{-l})r)\}^2 \end{aligned} \quad (3.75)$$

以下では $k_F r \gg 1$ として考える。

[2-], $\varepsilon < k_F r \omega_0$ の場合

- $\varepsilon \ll k_F r \omega_0$ での評価

このとき

$$J_l(k_F r) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_F r}} \cos\left(k_F r + \frac{l^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2l+1}{4}\pi\right) \quad (3.76)$$

が成立する。

よって

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &\simeq \frac{k_F^2}{16\xi^2} \left\{ \frac{2}{\pi(k_F + q_{-l})r} \cos^2\left((k_F + q_{-l})r + \frac{l^2 - 1/4}{2(k_F + q_{-l})r} - \frac{-2l+1}{4}\pi\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{\pi(k_F - q_{-l})r} \cos^2\left((k_F - q_{-l})r + \frac{l^2 + 2l + 3/4}{2(k_F - q_{-l})r} - \frac{-2l-1}{4}\pi\right) \right\}^2 \\ &\simeq \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 r^2} \left\{ \cos^2\left(k_F r + \frac{l^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{-2l+1}{4}\pi + q_{-l}r - \frac{l^2 - 1/4}{2k_F r} \frac{q_{-l}}{k_F}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin^2\left(k_F r + \frac{l^2 + 2l + 3/4}{2k_F r} - \frac{-2l+1}{4}\pi - q_{-l}r + \frac{l^2 + 2l + 3/4}{2k_F r} \frac{q_{-l}}{k_F}\right) \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.77)$$

ここで

$$\begin{aligned} f(r) &= k_F r + \frac{l^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{-2l+1}{4}\pi + q_{-l}r - \frac{l^2 - 1/4}{2k_F r} \frac{q_{-l}}{k_F} \sim k_F r \\ g(r) &= \frac{2l+1}{2k_F r} - 2q_{-l}r + \frac{2l^2 + 2l + 1/2}{2k_F r} \frac{q_{-l}}{k_F} \sim \frac{2l+1}{2k_F r} \ll 1 \end{aligned} \quad (3.78)$$

とおくと、(3.77) 式の $\{ \}$ は

$$\begin{aligned} &\left\{ \cos^2 f(r) + \sin^2(f(r) + g(r)) \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2}[1 + \cos 2f(r)] + \frac{1}{2}[1 - \cos(2f(r) + 2g(r))] \right\}^2 \\ &= \left\{ 1 - \frac{1}{2}[\cos(2f(r) + 2g(r)) - \cos 2f(r)] \right\}^2 \\ &\simeq \left\{ 1 + \sin 2f(r) g(r) - \cos 2f(r) g^2(r) \right\}^2 \\ &\simeq 1 + 2 \sin 2f(r) g(r) + (\sin^2 2f(r) - 2 \cos 2f(r)) g^2(r) \end{aligned} \quad (3.79)$$

とかける。

ここで $\sin 2f(r)$ などは激しく振動する関数なのに対し、 $g(r)$ は緩やかに変化する関数なので

$$\longrightarrow 1 + \frac{1}{2}g^2(r) \quad (3.80)$$

とできる。よって

$$\begin{aligned}
A(r, \varepsilon) &\sim \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{2} g^2(r)\right) \\
&\sim \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{2} \left[\frac{2l+1}{2k_F r}\right]^2\right) \\
&= \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{2} \left[\frac{\varepsilon}{\omega_0 k_F r}\right]^2\right)
\end{aligned}
\quad \text{for } \varepsilon \ll k_F r \omega_0 \quad (3.81)$$

- $\varepsilon \sim k_F r \omega_0$ (但し $\varepsilon < k_F r \omega_0$) での評価

このとき $\varepsilon/\omega_0 \sim k_F r \gg 1$ より

$$\begin{aligned}
A(r, \varepsilon) &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{J_{\varepsilon/\omega_0-1/2}^2((k_F + q_{-l})r) + J_{\varepsilon/\omega_0+1/2}^2((k_F - q_{-l})r)\}^2 \\
&\simeq \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{J_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) + J_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r)\}^2 \\
&= \frac{k_F^2}{4\xi^2} J_{\varepsilon/\omega_0}^4(k_F r)
\end{aligned} \quad (3.82)$$

$\nu \gg 1$ のとき、公式

$$J_\nu\left(\frac{\nu}{\cos \alpha}\right) \sim \frac{\cos[\nu(\tan \alpha - \alpha) - 1/4]}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\pi \tan \alpha}} \quad (0 < \alpha < \pi/2) \quad (3.83)$$

が成立する。

これは $1 \sim \frac{1}{\cos \alpha}$ の場合 $\cos$ の位相因子に関して大きな誤差を出す、包絡線を考える限りではよい評価を与えてくれる。よって $J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r)$ の振動部分を $\cos(h(r, \varepsilon))$ で表すことにして

$$\begin{aligned}
J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r) &\simeq \frac{\cos(h(r, \varepsilon))}{\sqrt{\frac{\pi k_F r}{2} \left(\frac{k_F^2 r^2 \omega_0^2}{\varepsilon^2} - 1\right)^{1/4}}} \\
&\stackrel{\frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0} \sim 1 \text{ より}}{\simeq} \frac{2^{1/4} \cos(h(r, \varepsilon))}{\pi^{1/2} (k_F r)^{1/2} \left(1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}\right)^{1/4}}
\end{aligned} \quad (3.84)$$

$J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r)$ の ε に関する振る舞いを考えると、包絡線を緩やかに変化させながら激しく振動することがいえる。⁴ 一つ一つの振動は正弦波とほぼ同じ形をしており、例えばその振幅の2乗を平均化して評価する時それに対する包絡線の1/2で与えることができる。

これより $A(r, \varepsilon)$ を平均化して評価すると

$$\begin{aligned}
A(r, \varepsilon) &= \frac{k_F^2}{4\xi^2} \frac{2 \cos^4(h(r, \varepsilon))}{\pi^2 (k_F r)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}\right)} \\
&\longrightarrow \frac{3}{16\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}}
\end{aligned} \quad (3.85)$$

といえる。⁵

⁴ 振動の周期を知るにはベッセル関数のゼロ点の間隔を見ればよく、 $\nu \gg 1$ の時 $J_\nu(x)$ の ν に関するゼロ点の間隔は最大で $\nu^{1/3}$ 程度になることがいえる。

⁵ $\int_0^{2\pi} dx \cos^4 x = \frac{3}{8}$ である。

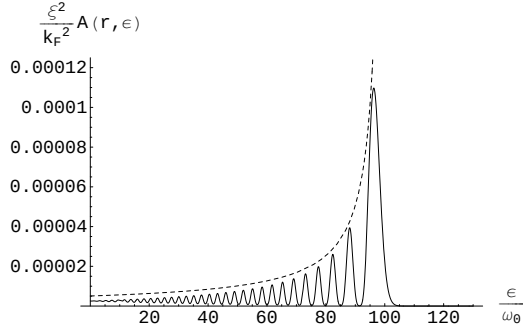


図 3.4: $A(r, \epsilon)$ の ϵ に関する変化 ($r = 100 k_F^{-1}$)
点線は (3.86) 式で評価した漸近形を表す。

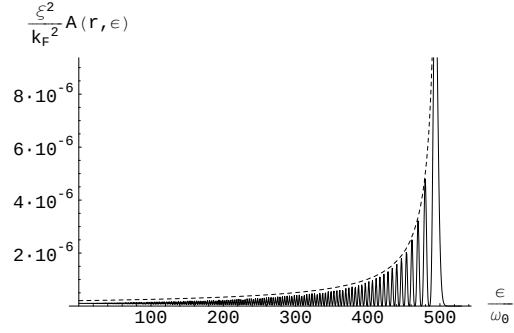


図 3.5: $A(r, \epsilon)$ の ϵ に関する変化 ($r = 1000 k_F^{-1}$)
点線は (3.86) 式で評価した漸近形を表す。

(3.81)、(3.85) 式のように $\epsilon < k_F r \omega_0$ の領域において重要なのは $\epsilon \sim k_F r \omega_0$ からの寄与である。
このことから $\epsilon \ll k_F r \omega_0$ の領域に対しても $\epsilon \sim k_F r \omega_0$ での表式を用いることにして

$$A(r, \epsilon) = \frac{3}{16\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{1}{1 - \frac{\epsilon}{k_F r \omega_0}} \quad \text{for } \epsilon < k_F r \omega_0 \quad (3.86)$$

この表式は $\epsilon \ll k_F r \omega_0$ の領域においても (3.81) 式とオーダーとして一致しており、それほど悪くない近似のように思われる。(図 3.4、3.5 での $r \sim 0$ の変化を参照。)

[2 -], $\epsilon > k_F r \omega_0$ の場合

$\nu \gg 1$ として

$$J_\nu\left(\frac{\nu}{\cosh a}\right) \sim \frac{e^{\nu(\tanh a - a)}}{\sqrt{2\nu\pi \tanh a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! A_n}{(\nu \tanh a)^n} \quad (a > 0) \quad (3.87)$$

という公式がある。ここで

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{8} - \frac{5}{24} \coth^2 a, \quad A_2 = \frac{3}{128} - \frac{77}{576} \coth^2 a + \frac{385}{3456} \coth^4 a, \dots$$

これを用いると、 $k_F r \omega_0 = \epsilon_0$ として

$$J_{\epsilon/\omega_0}(k_F r) \sim \frac{e^{-\epsilon/\omega_0 [\ln\{\epsilon/\omega_0 + \sqrt{(\epsilon/\omega_0)^2 - 1}\} - \sqrt{1 - (\epsilon/\omega_0)^{-2}}]}}{\sqrt{2\pi} ((\epsilon/\omega_0)^2 - k_F^2 r^2)^{1/4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! A_n}{((\epsilon/\omega_0)^2 - k_F^2 r^2)^{n/2}} \quad (3.88)$$

上式より $J_{\epsilon/\omega_0}(k_F r)$ は $\epsilon_0 < \epsilon$ で指数関数的に減衰することがうかがえる。このことを簡潔に示す。

(3.88) 式の指数関数の肩の部分で $\epsilon/\epsilon_0 = 1 + x$ ($0 < x \ll 1$) とすると

$$\ln\{\epsilon/\omega_0 + \sqrt{(\epsilon/\omega_0)^2 - 1}\} - \sqrt{1 - (\epsilon/\omega_0)^{-2}} \simeq \frac{2\sqrt{2}}{3} x^{3/2} - \frac{7}{5\sqrt{2}} x^{5/2} \quad (3.89)$$

よって $\epsilon/\epsilon_0 = 1 + x$ ($0 < x \ll 1$) において

$$J_{\epsilon/\omega_0}(k_F r) \propto e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\epsilon_0}{\omega_0} x^{3/2}} = e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3} k_F r x^{3/2}} \quad (3.90)$$

これによると

$$x \sim (k_F r)^{-3/2} \ll 1 \quad (3.91)$$

程度で $J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r)$ はゼロに近づくことになる。

実際に $J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r)$ の振る舞いを調べると、 $\varepsilon/\varepsilon_0 \sim 1$ で急激にゼロに落ちていることがわかる。(図 3.4、3.5 参照。)

以上より

$$A(r, \varepsilon) = 0 \quad \text{for } \varepsilon > k_F r \omega_0 \quad (3.92)$$

とする。

[2-]、結果の補正とまとめ

$\varepsilon < k_F r \omega_0$ に対する表式

$$A(r, \varepsilon) = \frac{3}{16\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}} \quad (3.93)$$

は $\varepsilon \rightarrow k_F r \omega_0$ で発散してしまうが、もとの表式の Bessel 関数で評価すると $A(r, \varepsilon)$ は有限にとどまる。よって (3.93) 式に対し $\varepsilon = k_F r \omega_0$ 近傍でカット・オフを導入することを試みる。

(3.82) 式より $\varepsilon/\omega_0 \sim k_F r \gg 1$ において

$$A(r, \varepsilon) \simeq \frac{k_F^2}{4\xi^2} J_{\varepsilon/\omega_0}^4(k_F r) \quad (3.94)$$

(3.93) 式の値の 8/3 倍⁶が (3.94) 式の $A(r, \varepsilon)$ の極大値より大きくなった時点でカット・オフを入れることにする。

$J_\nu(x)$ の極大値は $\nu \sim x$ のところに存在する。

$x = \nu \gg 1$ のとき

$$J_\nu(\nu) \sim \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3} 3^{1/6} \pi \nu^{1/3}} - \frac{3^{5/3} \Gamma(5/3)}{2^{1/3} 140 \pi \nu^{5/3}} + O(\nu^{-5/3}) \quad (3.95)$$

という公式がある。ここで $\Gamma(x)$ はガンマ関数である。

これからカット・オフを行う点を $\varepsilon = \varepsilon_1$ として

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} \frac{3}{16\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1}{k_F r \omega_0}} &= \frac{k_F^2}{4\xi^2} J_{k_F r}^4(k_F r) \\ \frac{2}{\pi^2 (k_F r)^2 (1 - \frac{\varepsilon_1}{k_F r \omega_0})} &= J_{k_F r}^4(k_F r) \end{aligned} \quad (3.96)$$

と定める。(3.95) 式より

$$J_{k_F r}^4(k_F r) \sim \frac{\Gamma(1/3)^4}{2^{8/3} 3^{2/3} \pi^4} (k_F r)^{-4/3} + O((k_F r)^{-8/3}) \quad (3.97)$$

よって

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi^2 (k_F r)^2 (1 - \frac{\varepsilon_1}{k_F r \omega_0})} &= \frac{\Gamma(1/3)^4}{2^{8/3} 3^{2/3} \pi^4} (k_F r)^{-4/3} \\ \varepsilon_1/\omega_0 &= k_F r - \frac{3^{8/3} \pi^2}{2^{10/3} \Gamma(1/3)^4} (k_F r)^{1/3} \\ &\sim k_F r - 0.71 (k_F r)^{1/3} \end{aligned} \quad (3.98)$$

⁶平均化する前の表式である。

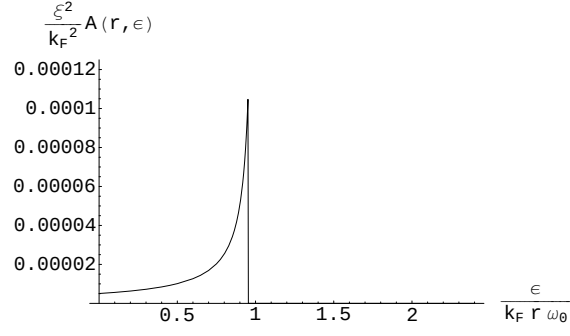


図 3.6: $A(r, \varepsilon)$ の ε に関する振る舞い ($r = 100k_F^{-1}$)

これによりカット・オフを行い、 $\varepsilon_1 < \varepsilon < k_F r \omega_0$ では $A(r, \varepsilon) = 0$ とする。

以上の結果をまとめると

$$R(r) = \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\Delta_\infty} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} A(r, \varepsilon) \quad (3.99)$$

ここで

$$A(r, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 r^2} \left(1 + \frac{1}{2} \psi^2(r)\right) & \text{for } \varepsilon < \varepsilon_c \\ \frac{3}{16\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}} & \text{for } \varepsilon_c < \varepsilon < \varepsilon_1 \\ 0 & \text{for } \varepsilon_1 < \varepsilon \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 = \{k_F r - 0.71 (k_F r)^{1/3}\} \omega_0 \quad (3.100)$$

$A(r, \varepsilon)$ の ε に関する振る舞いは図 3.6 のようになる。

3.3.2 カイラル p 波 positive vortex の場合

カイラル p 波に対する磁気緩和率は

$$A(r, \varepsilon) \equiv \sum_{n,m} \delta_{\varepsilon_n, \varepsilon} \delta_{\varepsilon_m, \varepsilon} |u_n(\mathbf{r}) u_m^*(\mathbf{r}) - v_n(\mathbf{r}) v_m^*(\mathbf{r})|^2 \quad (3.101)$$

として

$$R(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\Delta_\infty} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} A(r, \varepsilon) \quad (3.102)$$

と与えられる。

カイラル p 波 positive vortex のエネルギー準位は $E_n = -(n-1)\omega_0$ であり、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E_{-l} \\ &= (l+1)\omega_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.103)$$

として

$$A(r, \varepsilon) = |u_{-l}(\mathbf{r}) u_{-l}^*(\mathbf{r}) - v_{-l}(\mathbf{r}) v_{-l}^*(\mathbf{r})|^2 \quad (3.104)$$

とかける。

$u_l(\mathbf{r}), v_l(\mathbf{r})$ の表式を代入すると

$r < r_c$ で

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{J_{-l}^2((k_F + q_{-l})r) - J_{-l-2}^2((k_F - q_{-l})r)\}^2 \\ &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{J_l^2((k_F + q_{-l})r) - J_{l+2}^2((k_F - q_{-l})r)\}^2 \end{aligned} \quad (3.105)$$

$r > r_c$ で

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \left| \frac{k_F}{4\xi} \frac{2}{\pi k_F r} e^{-2K(r)} \left\{ \cos^2\left(k_F r + \frac{l^2 + 2l + 7/4}{2k_F r} - \frac{-2l + 1}{4}\pi + \psi(r)\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos^2\left(k_F r + \frac{l^2 + 2l + 7/4}{2k_F r} - \frac{-2l + 1}{4}\pi - \psi(r)\right) \right\} \right|^2 \end{aligned} \quad (3.106)$$

r を固定して ε を変化させる時の $A(r, \varepsilon)$ の振る舞いを考える。ここで r_c に対応するエネルギーを ε_c とする。条件 $r < r_c$, $r > r_c$ がどのエネルギー領域に対応するかを示すと (図 3.2 参照。)

$$r < r_c \implies \varepsilon > \varepsilon_c, \quad r > r_c \implies \varepsilon < \varepsilon_c \quad (3.107)$$

r を固定したときの $A(r, \varepsilon)$ の振る舞いを示すと図 3.7 のようになる。

(3.105)、(3.106) の表式では波数 k_F 程度で激しく振動しているが、これを平均化して扱うことを以下で試みる。

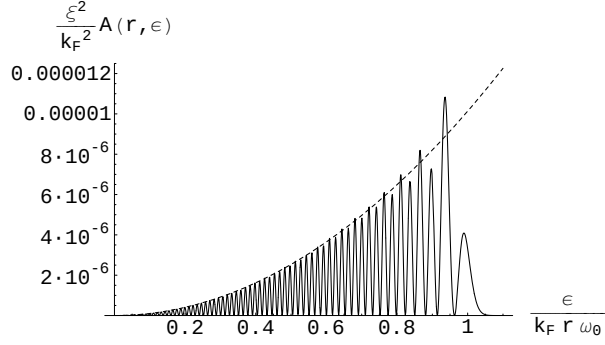


図 3.7: カイラル p 波 positive vortex における $A(r, \varepsilon)$ の ε 依存性 ($r = 100k_F^{-1}$)
 点線は包絡線を表す。このグラフで $\frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0} < 1$ の領域 ($[2 -]$ の場合に対応) と $\frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0} > 1$ ($[2 -]$ の場合に対応) に分けて議論を進めていく。

[1] $\varepsilon < \varepsilon_c$ に関して

$$f(r) = k_F r + \frac{l^2 + 2l + 7/4}{2k_F r} - \frac{-2l + 1}{4}\pi + \psi(r) \quad (3.108)$$

とすると、(3.106) 式の $\{ \}$ は

$$\begin{aligned} & \{ \cos^2 f(r) - \cos^2 (f(r) - 2\psi(r)) \}^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} [1 + \cos 2f(r)] - \frac{1}{2} [1 + \cos (2f(r) - 4\psi(r))] \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \{ \cos 2f(r) - \cos (2f(r) - 4\psi(r)) \}^2 \\ &\simeq \frac{1}{4} \left\{ \sin 2f(r) 4\psi(r) - \frac{1}{2} \cos 2f(r) (4\psi(r))^2 \right\}^2 \\ &\simeq 4 \sin^2 2f(r) \psi^2(r) - 8 \sin 4f(r) \psi^3(r) \end{aligned}$$

ここで $f(r)$ は k_F^{-1} 程度で激しく変動する関数であり、 $\psi(r)$ は ξ 程度で緩やかに変化する関数である。このことから

$$\longrightarrow 2\psi^2(r) \quad (3.109)$$

とできる。

よって

$$A(r, \varepsilon) = \frac{e^{-4K(r)}}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \psi^2(r) \quad \text{for } \varepsilon < \varepsilon_c \quad (3.110)$$

[2] $\varepsilon > \varepsilon_c$ に関して

(3.105) 式より

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{ J_l^2((k_F + q_{-l})r) - J_{l+2}^2((k_F - q_{-l})r) \}^2 \\ &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{ J_{\varepsilon/\omega_0-1}^2((k_F + q_{-l})r) - J_{\varepsilon/\omega_0+1}^2((k_F - q_{-l})r) \}^2 \end{aligned} \quad (3.111)$$

以下では $k_F r \gg 1$ として考える。

[2-], $\varepsilon < k_F r \omega_0$ の場合

• $\varepsilon \ll k_F r \omega_0$ での評価

このとき

$$J_l(k_F r) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi k_F r}} \cos\left(k_F r + \frac{l^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{2l+1}{4}\pi\right) \quad (3.112)$$

が成立するので

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &\simeq \frac{k_F^2}{16\xi^2} \left\{ \frac{2}{\pi(k_F + q_{-l})r} \cos^2\left((k_F + q_{-l})r + \frac{l^2 - 1/4}{2(k_F + q_{-l})r} - \frac{-2l+1}{4}\pi\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\pi(k_F - q_{-l})r} \cos^2\left((k_F - q_{-l})r + \frac{l^2 + 4l + 15/4}{2(k_F - q_{-l})r} - \frac{-2l-3}{4}\pi\right) \right\}^2 \\ &\simeq \frac{1}{4\pi^2 \xi^2 r^2} \left\{ \left(1 - \frac{q_{-l}}{k_F}\right) \cos^2\left(k_F r + \frac{l^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{-2l+1}{4}\pi + q_{-l}r - \frac{l^2 - 1/4}{2k_F r} \frac{q_{-l}}{k_F}\right) \right. \\ &\quad \left. - \left(1 + \frac{q_{-l}}{k_F}\right) \cos^2\left(k_F r + \frac{l^2 + 4l + 15/4}{2k_F r} - \frac{-2l+1}{4}\pi - q_{-l}r + \frac{l^2 + 4l + 15/4}{2k_F r} \frac{q_{-l}}{k_F}\right) \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.113)$$

ここで

$$\begin{aligned} f(r) &= k_F r + \frac{l^2 - 1/4}{2k_F r} - \frac{-2l+1}{4}\pi + q_{-l}r - \frac{l^2 - 1/4}{2k_F r} \frac{q_{-l}}{k_F} \sim k_F r, \\ g(r) &= 2\frac{l+1}{k_F r} - 2q_{-l}r + \frac{2l^2 + 4l + 4}{2k_F r} \frac{q_{-l}}{k_F} \sim 2\frac{l+1}{k_F r} \ll 1 \end{aligned} \quad (3.114)$$

とおくと、(3.113) 式の $\{ \}$ は

$$\begin{aligned} &\left\{ \left(1 - \frac{q_{-l}}{k_F}\right) \cos^2 f(r) - \left(1 + \frac{q_{-l}}{k_F}\right) \cos^2(f(r) + g(r)) \right\}^2 \\ &= \left\{ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{q_{-l}}{k_F}\right) [1 + \cos 2f(r)] - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{q_{-l}}{k_F}\right) [1 + \cos(2f(r) + 2g(r))] \right\}^2 \\ &\simeq \left\{ \frac{1}{2} [\cos(2f(r) + 2g(r)) - \cos 2f(r)] - \frac{q_{-l}}{k_F} \right\}^2 \\ &\simeq \left\{ -\sin 2f(r) g(r) - \cos 2f(r) g^2(r) - \frac{q_{-l}}{k_F} \right\}^2 \\ &\simeq \sin^2 2f(r) g^2(r) + \sin 4f(r) g^3(r) + 2 \sin 2f(r) g(r) \frac{q_{-l}}{k_F} + \left(\frac{q_{-l}}{k_F}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.115)$$

とかける。

ここで $\sin 2f(r)$ などは激しく振動する関数なのに対し、 $g(r)$ は緩やかに変化する関数なので

$$\begin{aligned} &\longrightarrow \frac{1}{2} g^2(r) + \left(\frac{q_{-l}}{k_F}\right)^2 \\ &\simeq 2 \left(\frac{l+1}{k_F r}\right)^2 + \left[\frac{(l+1)\omega_0}{2E_F}\right]^2 \\ &\simeq 2 \left(\frac{l+1}{k_F r}\right)^2 + \left[\frac{l}{k_F^2 \xi^2}\right]^2 \\ &\simeq 2 \left(\frac{l+1}{k_F r}\right)^2 \end{aligned} \quad (3.116)$$

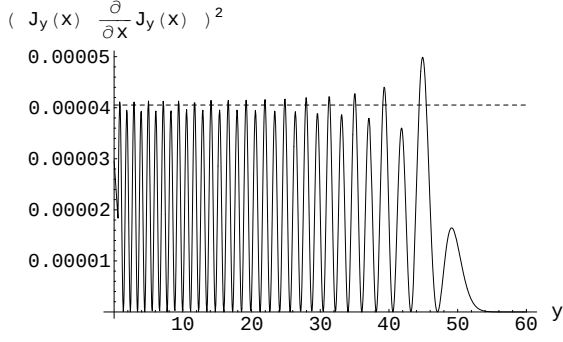


図 3.8: $J_y(x) \frac{\partial}{\partial x} J_y(x)$ の y に関する変化の様子 ($x = 50$)

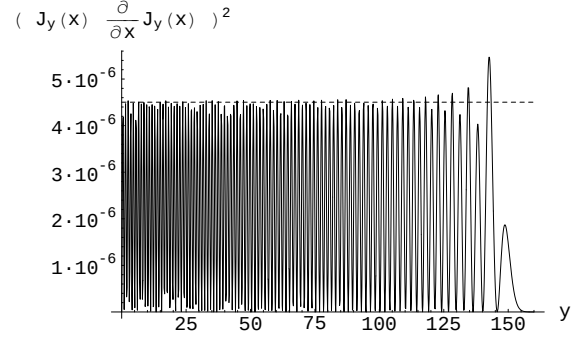


図 3.9: $J_y(x) \frac{\partial}{\partial x} J_y(x)$ の y に関する変化の様子 ($x = 150$)

よって

$$\begin{aligned}
 A(r, \varepsilon) &\sim \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \left(\frac{l+1}{k_F r} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \left(\frac{\varepsilon}{\omega_0 k_F r} \right)^2 \\
 &\text{for } \varepsilon \ll k_F r \omega_0
 \end{aligned} \tag{3.117}$$

• $\omega_0 \ll \varepsilon < k_F r \omega_0$ での評価

$$\begin{aligned}
 A(r, \varepsilon) &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{ J_l^2((k_F + q_{-l})r) - J_{l+2}^2((k_F - q_{-l})r) \}^2 \\
 &\simeq \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{ J_l^2(k_F r) - J_{l+2}^2(k_F r) \}^2 \\
 &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \{ (J_l(k_F r) + J_{l+2}(k_F r))(J_l(k_F r) - J_{l+2}(k_F r)) \}^2 \\
 &= \frac{k_F^2}{16\xi^2} \left\{ \frac{2(l+1)}{k_F r} J_{l+1}(k_F r) \left(-2 \frac{\partial}{\partial(k_F r)} J_{l+1}(k_F r) \right) \right\}^2 \\
 &= \frac{k_F^2}{\xi^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0} J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r) \frac{\partial}{k_F \partial r} J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r) \right\}^2
 \end{aligned} \tag{3.118}$$

ここで公式 $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = 2nx^{-1}J_n(x)$, $\frac{\partial}{\partial x} J_n(x) = \frac{1}{2}[J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)]$ を用いた。 $x \gg 1$ と

して $J_y(x) \frac{\partial}{\partial x} J_y(x)$ について考える。

$y \ll x$ のとき

$$J_y(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{(2y+1)\pi}{4}\right) \tag{3.119}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} J_y(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \frac{(2y+1)\pi}{4}\right) \tag{3.120}$$

より

$$J_y(x) \frac{\partial}{\partial x} J_y(x) \sim \frac{1}{\pi x} \sin\left(2x - \frac{(2y+1)\pi}{2}\right) \tag{3.121}$$

次に $1 \ll y < x$ での表式を考えたいのだが、 $\frac{\partial}{\partial x} J_y(x)$ をうまく表す漸近形がよくわからない。⁷そこで $J_y(x) \frac{\partial}{\partial x} J_y(x)$ の振る舞いを実際にプロットして調べてみると、実は $y < x$ においてはほぼ一定であることがわかる。(図 3.8、3.9 参照。) 以下に $y \sim x$ における $J_y(x) \frac{\partial}{\partial x} J_y(x)$ の値の見積もりの例として、 $J_y(x)$ の最初のゼロ点 (y の正の遠方から見て) から 2 番目のゼロ点にかけての極大値を求めてみる。

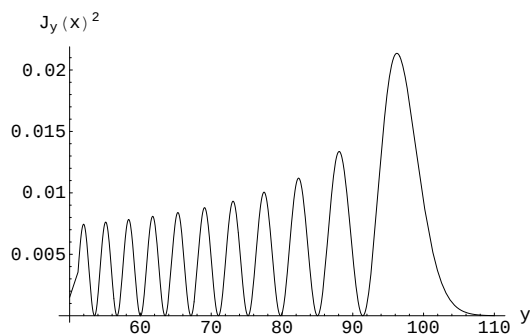


図 3.10: $J_y^2(x)$ の y に関する変化の様子 ($x = 100$)

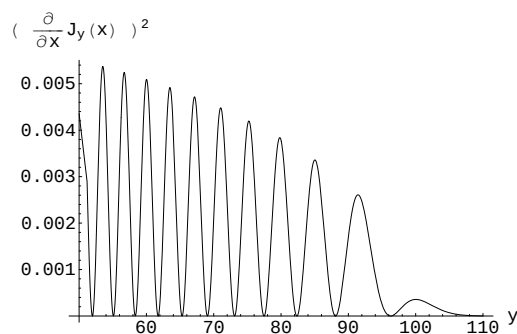


図 3.11: $(\frac{\partial}{\partial x} J_y(x))^2$ の y に関する変化の様子 ($x = 100$)

この領域における $J_y(x)$, $\frac{\partial}{\partial x} J_y(x)$ の振る舞いは図 3.10、3.11 のようになる。 $J_y(x)$ の最初のゼロ点を y_1 、2 番目のゼロ点を y_2 (図 3.10 において $y_1 \sim 92$, $y_2 \sim 85$ である。) とすると

$$\begin{aligned} y_1 &\sim x - 1.855x^{1/3} \\ y_2 &\sim x - 3.245x^{1/3} \end{aligned} \quad (3.122)$$

となる。

(3.83) 式より $J_y(x)$ の包絡線は

$$|J_y(x)| \sim \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi x}{2} \{2(1 - \frac{y}{x})\}^{1/4}}} \quad (\equiv f(x, y) \text{ とする。}) \quad (3.123)$$

$y_1 < y < y_2$ にかけての $J_y(x)$ の変動を正弦波に近似すると、 $\frac{\partial}{\partial x} J_y(x)$ の極大値は

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{2} \frac{f(x, y_1) + f(x, y_2)}{y_1 - y_2} &\simeq \frac{\pi^{1/2}}{2} \frac{0.324x^{-1/3} + 0.282x^{-1/3}}{1.39x^{1/3}} \\ &\simeq 0.218\pi^{1/2}x^{-2/3} \end{aligned} \quad (3.124)$$

と見積もれる。⁸よって $J_y(x) \frac{\partial}{\partial x} J_y(x)$ の極大値は

$$\frac{1}{2} f(x, y_1) \times 0.218\pi^{1/2}x^{2/3} \sim 0.04x^{-1} \quad (3.125)$$

これは (3.121) 式から求まる値 $\frac{1}{\pi x}$ とオーダーとして同じである。

つまり $J_y(x) \frac{\partial}{\partial x} J_y(x) = \frac{1}{\pi x}$ の評価が悪くなる $y \sim x$ においても (図 3.8、3.9 参照。) 無視できるほどの誤差しか出さないといえる。

⁷(3.83) 式を用いて評価しようとしても、その式は振動する様子までは正確に表していないので微分した量の誤差は大きくなってしまう。

⁸(3.124) 式の因子 $\pi/2$ は $J_y(x)$ の変動を正弦波に近似したことによる。(cos x の極大値は $\frac{\pi}{2} \frac{\sin \pi/2 - \sin 0}{\pi/2 - 0} = 1$ である。)

以上より $\left(J_y(x) \frac{\partial}{\partial x} J_y(x) \right)^2$ を平均化して扱うことにして (3.121) 式より⁹

$$\left(J_y(x) \frac{\partial}{\partial x} J_y(x) \right)^2 = \frac{1}{2\pi^2 x^2} \quad \text{for } y < x \quad (3.126)$$

と近似する。
これより

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \frac{k_F^2}{\xi^2} \left\{ \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0} J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r) \frac{\partial}{k_F \partial r} J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r) \right\}^2 \\ &\simeq \frac{k_F^2}{\xi^2} \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \frac{1}{2\pi^2 (k_F r)^2} \\ &= \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \end{aligned} \quad (3.127)$$

これは (3.112) 式を使って評価するのと同じなので (3.117) 式の表式とも一致している。¹⁰
結果をまとめると

$$A(r, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \quad \text{for } \varepsilon_c < \varepsilon < k_F r \omega_0 \quad (3.128)$$

[2-]、 $\varepsilon > k_F r \omega_0$ の場合

S 波 vortex での議論と同様にして $\varepsilon/\varepsilon_0 = 1 + x$ ($0 < x \ll 1$) とおくと

$$J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r) \propto e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{\varepsilon_0}{\omega_0} x^{3/2}} = e^{-\frac{2\sqrt{2}}{3} k_F r x^{3/2}} \quad (3.129)$$

がいえる。このことから $\frac{\partial}{k_F \partial x} J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r)$ も指数関数的に急激に減衰することがいえる。(図 3.8、3.9 の $y > x$ での変化を参照。)

よって (3.118) 式から

$$A(r, \varepsilon) = 0 \quad \text{for } \varepsilon > k_F r \omega_0 \quad (3.130)$$

とする。

⁹(3.126) 式の因子 $\frac{1}{2}$ は平均化したためについている。

¹⁰つまり (3.127) の表式は $\varepsilon \ll k_F r \omega_0$ でも適用できる。

以上をまとめると

$$R(r) = \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\Delta_\infty} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} A(r, \varepsilon) \quad (3.131)$$

ここで

$$A(r, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \psi^2(r) & \text{for } \varepsilon < \varepsilon_c \\ \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} & \text{for } \varepsilon_c < \varepsilon < k_F r \omega_0 \\ 0 & \text{for } k_F r \omega_0 < \varepsilon \end{cases} \quad (3.132)$$

$A(r, \varepsilon)$ の ε に関する振る舞いは図 3.12 のようになる。

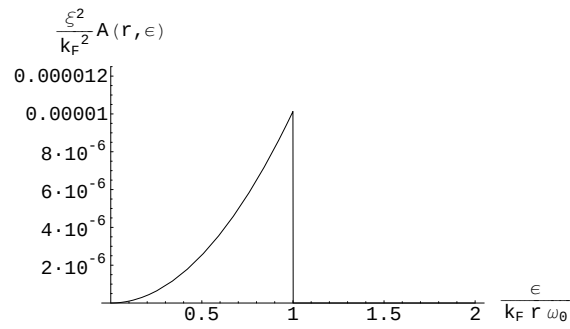


図 3.12: $A(r, \varepsilon)$ の ε に関する振る舞い ($r = 100k_F^{-1}$)

3.3.3 カイラル p 波 negative vortex の場合

カイラル p 波に対する磁気緩和率は

$$A(r, \varepsilon) \equiv \sum_{n,m} \delta_{\varepsilon_n, \varepsilon} \delta_{\varepsilon_m, \varepsilon} |u_n(\mathbf{r}) u_m^*(\mathbf{r}) - v_n(\mathbf{r}) v_m^*(\mathbf{r})|^2 \quad (3.133)$$

として

$$R(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\Delta_\infty} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} A(r, \varepsilon) \quad (3.134)$$

と与えられる。

カイラル p 波 positive vortex のエネルギー準位は $E_n = n\omega_0$ であり、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= E_l \\ &= l\omega_0 \geq 0 \end{aligned} \quad (3.135)$$

とすると

$$A(r, \varepsilon) = |u_l(\mathbf{r}) u_l^*(\mathbf{r}) - v_l(\mathbf{r}) v_l^*(\mathbf{r})|^2 \quad (3.136)$$

とかける。

$u_l(\mathbf{r}), v_l(\mathbf{r})$ の表式を代入すると¹¹

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \left\{ \frac{k_F}{16\xi} e^{-2K(r)} (|H_l^{(1)}(k_F r) e^{i\psi_l(r)} + H_l^{(2)}(k_F r) e^{-i\psi_l(r)}|^2 \right. \\ &\quad \left. - |H_l^{(1)}(k_F r) e^{-i\psi_l(r)} + H_l^{(2)}(k_F r) e^{i\psi_l(r)}|^2) \right\}^2 \end{aligned} \quad (3.137)$$

(3.137) 式の () において $|\psi_l(r)| \ll 1$ より展開すると

$$\begin{aligned} &(|H_l^{(1)}(k_F r) e^{i\psi_l(r)} + H_l^{(2)}(k_F r) e^{-i\psi_l(r)}|^2 - |H_l^{(1)}(k_F r) e^{-i\psi_l(r)} + H_l^{(2)}(k_F r) e^{i\psi_l(r)}|^2) \\ &\simeq |H_l^{(1)}(k_F r)(1 + i\psi_l(r)) + H_l^{(2)}(k_F r)(1 - i\psi_l(r))|^2 - |H_l^{(1)}(k_F r)(1 - i\psi_l(r)) + H_l^{(2)}(k_F r)(1 + i\psi_l(r))|^2 \\ &= \{H_l^{(1)}(k_F r)(1 + i\psi_l(r)) + H_l^{(2)}(k_F r)(1 - i\psi_l(r))\} \{H_l^{(2)}(k_F r)(1 - i\psi_l(r)) + H_l^{(1)}(k_F r)(1 + i\psi_l(r))\} \\ &\quad - \{H_l^{(1)}(k_F r)(1 - i\psi_l(r)) + H_l^{(2)}(k_F r)(1 + i\psi_l(r))\} \{H_l^{(2)}(k_F r)(1 + i\psi_l(r)) + H_l^{(1)}(k_F r)(1 - i\psi_l(r))\} \\ &= 4i\psi_l(r) ([H_l^{(1)}(k_F r)]^2 - [H_l^{(2)}(k_F r)]^2) \\ &= -16\psi_l(r) J_l(k_F r) N_l(k_F r) \end{aligned} \quad (3.138)$$

これより

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \left\{ \frac{k_F}{16\xi} e^{-2K(r)} (-16)\psi_l(r) J_l(k_F r) N_l(k_F r) \right\}^2 \\ &= \frac{k_F^2}{\xi^2} e^{-4K(r)} \psi_l^2(r) J_l^2(k_F r) N_l^2(k_F r) \\ &= \frac{k_F^2}{\xi^2} e^{-4K(r)} \psi_l^2(r) J_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) N_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) \end{aligned} \quad (3.139)$$

以下で (3.139) 式における速い振動を平均化し解釈しやすい表式にもっていく。

¹¹ここでは $\psi(r)$ の l 依存性を強調するために $\psi_l(r)$ とかいた。もちろん S 波やカイラル p 波 positive vortex の場合も $\psi(r)$ は l 依存性をもつ。

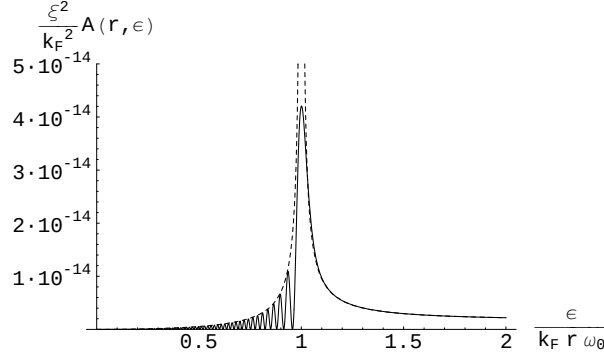


図 3.13: カイラル p 波 negative vortex における $A(r, \varepsilon)$ の ε 依存性 ($r = 100k_F^{-1}$)

点線は包絡線を表す。ここで S 波 vortex とカイラル p 波 positive vortex の場合と縦軸を合わせるため $\xi = 10000k_F^{-1}$ として評価した。このグラフで $\frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0} < 1$ の領域 ([1] の場合に対応) と $\frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0} > 1$ ([2] の場合に対応) に分けて議論を進めていく。

まず $\psi_l(r)$ について考える。

$$\begin{aligned}\psi_l(r) &= -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty dr' e^{2K(r)-2K(r')} (E_l - \frac{l \Delta(r')}{k_F r'}) \\ &= -\frac{m \varepsilon}{k_F} \int_r^\infty dr' e^{2K(r)-2K(r')} (1 - \frac{\Delta(r')}{\omega_0 k_F r'}) \\ &\equiv \varepsilon \bar{\psi}(r)\end{aligned}$$

但し

$$\bar{\psi}(r) = -\frac{m}{k_F} \int_r^\infty dr' e^{2K(r)-2K(r')} (1 - \frac{\Delta(r')}{\omega_0 k_F r'}) \quad (3.140)$$

ここで $\psi_l(0) = 0$ であり、
特に $r \ll \xi$ を考えることにすると¹²

$$\begin{aligned}\bar{\psi}(r) &= \bar{\psi}(r) - \bar{\psi}(0) \\ &= \frac{m}{k_F} \left\{ -e^{2K(r)} \int_r^\infty dr' e^{-2K(r')} (1 - \frac{\Delta(r')}{\omega_0 k_F r'}) + \int_0^\infty dr' e^{-2K(r')} (1 - \frac{\Delta(r')}{\omega_0 k_F r'}) \right\} \\ &\simeq \frac{m}{k_F} \int_0^r dr' e^{-2K(r')} (1 - \frac{\Delta(r')}{\omega_0 k_F r'}) \\ &\sim \frac{m}{k_F} \int_0^r dr' (1 - \frac{1}{\omega_0 k_F r'} \frac{\Delta_\infty r'}{\xi}) \\ &= \frac{m}{k_F} (1 - \frac{\Delta_\infty}{\omega_0 k_F \xi}) r\end{aligned} \quad (3.141)$$

次に $J_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) N_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r)$ について考える。
以下では $k_F r \gg 1$ とする。

[1]、 $\varepsilon < k_F r \omega_0$ の場合

¹² $\bar{\psi}(r)$ の次元は $[1/J]$ である。ちなみに S 波 vortex、p 波 negative vortex の場合も (3.140) 式のように $\psi(r) \propto \varepsilon$ となるがその 2 つの場合に $\psi(r)$ は物理にほとんど関係してこない。

$J_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) N_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r)$ の概形を示すと図 3.13 のようになる。図からわかるように $\int d\varepsilon$ において大きく寄与するのは $\varepsilon \sim k_F r \omega_0$ の領域であり、そこでの表式を $\varepsilon < k_F r \omega_0$ の全範囲に適用させることにする。(S 波 vortex の場合と同じである。)

$\nu \gg 1$ のとき

$$\begin{aligned} J_\nu\left(\frac{\nu}{\cos \alpha}\right) &\sim \frac{\cos[\nu(\tan \alpha - \alpha) - 1/4]}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\pi \tan \alpha}} \\ N_\nu\left(\frac{\nu}{\cos \alpha}\right) &\sim \frac{\sin[\nu(\tan \alpha - \alpha) - 1/4]}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\pi \tan \alpha}} \end{aligned} \quad (0 < \alpha < \pi/2)$$

(3.142)

が成立する。

前にも述べたように、これは位相因子に関しては誤差を出す、包絡線を考える上ではよい評価を与えてくれる。よって $J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r)$, $N_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r)$ の振動部分を $\cos(h(r, \varepsilon))$ で表すことにすると

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r) N_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r) &\simeq \frac{2 \cos h(r, \varepsilon) \sin h(r, \varepsilon)}{\pi \frac{\varepsilon}{\omega_0} \left(\left(\frac{k_F r \omega_0}{\varepsilon} \right)^2 - 1 \right)^{1/2}} \\ &= \frac{\sin 2h(r, \varepsilon)}{\pi k_F r \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \right)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.143)$$

よって

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \frac{k_F^2}{\xi^2} e^{-4K(r)} \psi_l^2(r) J_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) N_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) \\ &= \frac{k_F^2}{\xi^2} e^{-4K(r)} \bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2 \frac{\sin^2 2h(r, \varepsilon)}{\pi^2 (k_F r)^2 \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \right)} \end{aligned} \quad (3.144)$$

平均化して評価すると

$$\begin{aligned} \longrightarrow \frac{e^{-4K(r)}}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}} \end{aligned} \quad \text{for } \varepsilon < k_F r \omega_0 \quad (3.145)$$

[2]、 $\varepsilon > k_F r \omega_0$ の場合

このとき次の公式が成立する。

$\nu \gg 1$ として

$$\begin{aligned} J_\nu\left(\frac{\nu}{\cosh a}\right) &\sim \frac{e^{\nu(\tanh a - a)}}{\sqrt{2\nu\pi \tanh a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!! A_n}{(\nu \tanh a)^n} \\ N_\nu\left(\frac{\nu}{\cosh a}\right) &\sim -\frac{e^{-\nu(\tanh a - a)}}{\sqrt{\frac{1}{2}\nu\pi \tanh a}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!! A_n}{(\nu \tanh a)^n} \end{aligned} \quad (a > 0) \quad (3.146)$$

但し

$$A_0 = 1, \quad A_1 = \frac{1}{8} - \frac{5}{24} \coth^2 a, \quad A_2 = \frac{3}{128} - \frac{77}{576} \coth^2 a + \frac{385}{3456} \coth^4 a, \dots$$

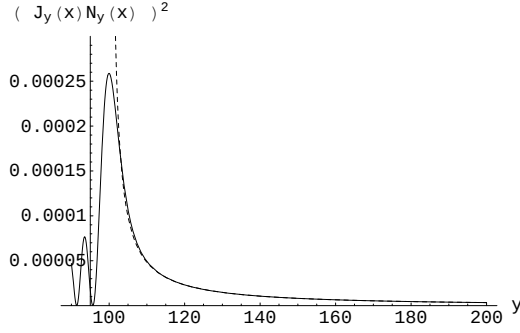


図 3.14: $J_y^2(x)N_y^2(x)$ の y に関する変化の様子
($x = 100$)

点線は (3.147) 式で評価した漸近形を表す。

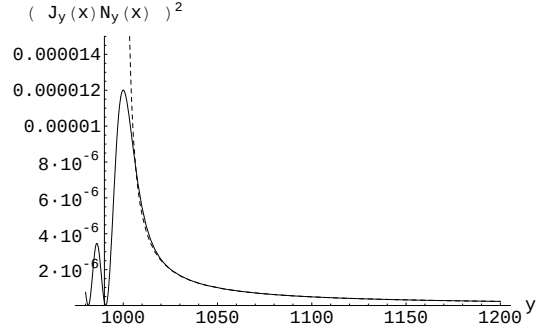


図 3.15: $J_y^2(x)N_y^2(x)$ の y に関する変化の様子
($x = 1000$)

点線は (3.147) 式で評価した漸近形を表す。

上式の 0 次の項のみを用いると, $k_F r \omega_0 = \varepsilon_0$ として

$$J_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r) N_{\varepsilon/\omega_0}(k_F r) \sim \frac{-1}{\frac{\pi \varepsilon}{\omega_0} \sqrt{1 - \left(\frac{k_F r \omega_0}{\varepsilon}\right)^2}} = \frac{-1}{\pi k_F r \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} - 1}} \quad (3.147)$$

この表式は $\varepsilon \rightarrow \varepsilon_0$ の極限で発散し誤差が大きくなるが、概して $\varepsilon > \varepsilon_0$ でのよい漸近形となっている。
(図 3.14、3.15 参照。)

これより

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \frac{k_F^2}{\xi^2} e^{-4K(r)} \psi_l^2(r) J_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) N_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) \\ &\simeq \frac{e^{-4K(r)}}{\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{\frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} - 1} \\ &\quad \text{for } \varepsilon > k_F r \omega_0 \end{aligned} \quad (3.148)$$

(3.145)、(3.148) 式より

$$\begin{aligned} A(r, \varepsilon) &= \frac{e^{-4K(r)}}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}} \\ &\quad \text{for } \varepsilon < k_F r \omega_0 \\ A(r, \varepsilon) &= \frac{e^{-4K(r)}}{\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{\frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} - 1} \\ &\quad \text{for } \varepsilon > k_F r \omega_0 \end{aligned} \quad (3.149)$$

この表式は $\varepsilon \rightarrow k_F r \omega_0$ で発散してしまうが、もとの表式の Bessel 関数で評価すると $A(r, \varepsilon)$ は有限にとどまる。よって (3.149) 式に対し $\varepsilon = k_F r \omega_0$ 近傍でカット・オフをいれるを試みる。

(3.139) 式より、もともと

$$A(r, \varepsilon) = \frac{k_F^2}{\xi^2} e^{-4K(r)} \psi_l^2(r) J_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) N_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r) \quad (3.150)$$

(3.149) 式の値が (3.150) 式の $A(r, \varepsilon)$ の極大値より大きくなったぐらいでカット・オフを入れることにする。

$J_\nu(x)N_\nu(x)$ の極大値は $\nu \sim x$ のところに存在する。

$x = \nu \gg 1$ のとき

$$J_\nu(\nu) \sim \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3}3^{1/6}\pi\nu^{1/3}} \quad , \quad N_\nu(\nu) \sim -\frac{3^{1/3}\Gamma(1/3)}{2^{2/3}\pi\nu^{1/3}} \quad (3.151)$$

が成り立つ。

よって $J_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r)N_{\varepsilon/\omega_0}^2(k_F r)$ の極大値はだいたい

$$\begin{aligned} J_{k_F r}^2(k_F r)N_{k_F r}^2(k_F r) &\sim \frac{\Gamma^2(1/3)}{2^{4/3}3^{1/3}\pi^2(k_F r)^{2/3}} \frac{3^{2/3}\Gamma^2(1/3)}{2^{4/3}\pi^2(k_F r)^{2/3}} \\ &= \frac{3^{1/3}\Gamma^4(1/3)}{2^{8/3}\pi^4(k_F r)^{4/3}} \\ &\sim 11.7\pi^{-4}(k_F r)^{-4/3} \end{aligned} \quad (3.152)$$

これから、カット・オフを行う点を $\varepsilon = \varepsilon_1 < k_F r \omega_0$, $\varepsilon = \varepsilon_2 > k_F r \omega_0$ として

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi^2 r^2} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_1^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}} &= k_F^2 \times 11.7\pi^{-4}(k_F r)^{-4/3} \quad , \\ \frac{1}{\pi^2 r^2} \frac{1}{\frac{\varepsilon_2^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} - 1} &= k_F^2 \times 11.7\pi^{-4}(k_F r)^{-4/3} \end{aligned} \quad (3.153)$$

と定める。¹³ これより

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &\simeq \left\{ k_F r - \frac{\pi^2}{23.4}(k_F r)^{1/3} \right\} \omega_0 \simeq \left\{ k_F r - 0.42(k_F r)^{1/3} \right\} \omega_0 \quad , \\ \varepsilon_2 &\simeq \left\{ k_F r + \frac{\pi^2}{23.4}(k_F r)^{1/3} \right\} \omega_0 \simeq \left\{ k_F r + 0.42(k_F r)^{1/3} \right\} \omega_0 \end{aligned} \quad (3.154)$$

上式で定めた $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ を用いてカット・オフを行い、 $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$ では $A(r, \varepsilon) = 0$ とする。

¹³ $\varepsilon < k_F r \omega_0$ の表式に関しては波数 k_F 程度の振動を平均化する前の表式を用いる。

以上の結果をまとめると

$$R(r) = \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\Delta_\infty} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} A(r, \varepsilon) \quad (3.155)$$

ここで

$$A(r, \varepsilon) = \begin{cases} \frac{e^{-4K(r)}}{2\pi^2\xi^2 r^2} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}} & \text{for } \varepsilon < \varepsilon_1 \\ 0 & \text{for } \varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2 \\ \frac{e^{-4K(r)}}{\pi^2\xi^2 r^2} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{\frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} - 1} & \text{for } \varepsilon_2 < \varepsilon \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 = \{k_F r - 0.42 (k_F r)^{1/3}\} \omega_0$$

$$\varepsilon_2 = \{k_F r + 0.42 (k_F r)^{1/3}\} \omega_0 \quad (3.156)$$

$A(r, \varepsilon)$ の ε に関する振る舞いは図 3.16 のようになる。

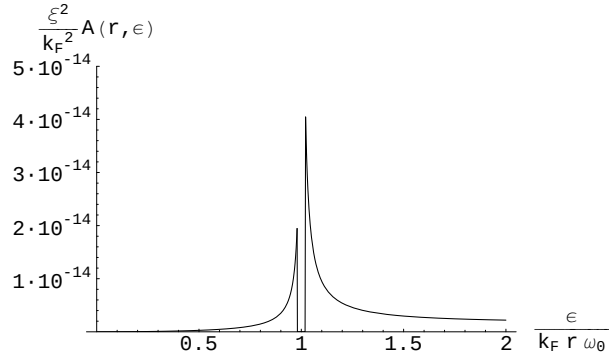


図 3.16: $A(r, \varepsilon)$ の ε に関する振る舞い ($r = 100k_F^{-1}$)

ここで S 波 vortex とカイラル p 波 positive vortex の場合と縦軸を合わせるため $\xi = 10000k_F^{-1}$ として評価した。

第4章 核磁気緩和率の結果

この章では (3.100)、(3.132)、(3.156) 式の表式に対し積分を数値的に実行し、各々の場合に対し得られた核磁気緩和率の空間依存性、局所的温度依存性の結果を示す。

数値積分を行うとき S 波、カイラル p 波 negative vortex、positive vortex すべての場合に対し

$$\xi = 10000k_F^{-1}, \quad \Delta_\infty = \frac{10000}{0.85}\omega_0 \quad (4.1)$$

とおいた。 $^1k_B T = 10\omega_0$ 、 $k_B T = 100\omega_0$ 、 $k_B T = 1000\omega_0$ に対する空間依存性と $r = 10k_F^{-1}$ 、 $r = 100k_F^{-1}$ 、 $r = 1000k_F^{-1}$ における温度依存性を求めた。求めた核磁気緩和率は全て転移温度 T_c における正常状態での量 R_0 により規格化してある。 2T_c を求める際、弱結合の超伝導におけるユニバーサルな関係式 $2\Delta_{(T=0)}/k_B T_c = 3.53$ を用い、その式で $\Delta_{(T=0)} = \Delta_\infty$ と当てはめた。

結果は後のページにまとめてある。この結果で最も主張したい点は次のことである。

- ★ $1 \ll k_F r \ll \xi$ において S 波 vortex とカイラル p 波 positive vortex の核磁気緩和率の値の大きさは同程度であり ($R(r)/R_0$ はおよそ $10^{-2} \sim 10^2$)、カイラル p 波 negative vortex の緩和率はそれに比べて無視できるほど小さくなる。($R(r)/R_0$ はおよそ $10^{-10} \sim 10^{-6}$)

図 4.1 に $k_B T/\omega_0 = 100$ における核磁気緩和率、図 4.2 に $k_F r = 100$ における核磁気緩和率が示されている。グラフは常用対数で log-log プロットであり、S 波とカイラル p 波 positive vortex とカイラル p 波 negative vortex の場合の比較を行っている。(以下の全てのグラフは常用対数による log-log プロットとなっている。) 上記のことが成立していることがわかる。

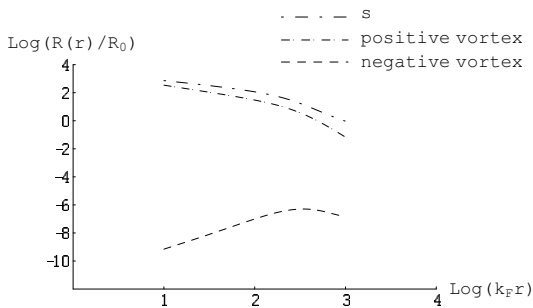


図 4.1: $k_B T/\omega_0 = 100$ における核磁気緩和率の r 依存性

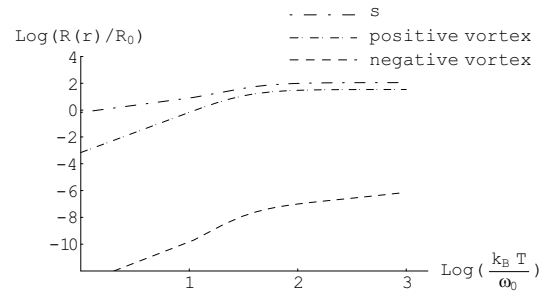


図 4.2: $k_F r = 100$ における核磁気緩和率の T 依存性

¹ Sr_2RuO_4 において ab 平面 ($\text{Ru}-\text{O}$ 平面) 上のコヒーレンス長は $660\text{\AA}$ であり今回の設定はオーダーとして同じになっている。
 Δ_∞ の表式は、 $\omega_0 = \frac{\int_0^\infty \frac{\Delta(r)}{k_F r} e^{-2K(r)} dr}{\int_0^\infty e^{-2K(r)} dr}$ に対し $\Delta(r) = \Delta_\infty \tanh(r/\xi)$ を仮定することにより得られる。

²B-dG 方程式で $\Delta(r) = 0$ とおくと $R_0 = \frac{m^2 k_B T_c}{4\pi}$ を得る。

結果の詳細に関して以下で述べる。但しこの結果は後に述べる理論の適用領域に該当する時のみ正当性を保証されることを注意しておく。

[1]、S 波 vortex の場合

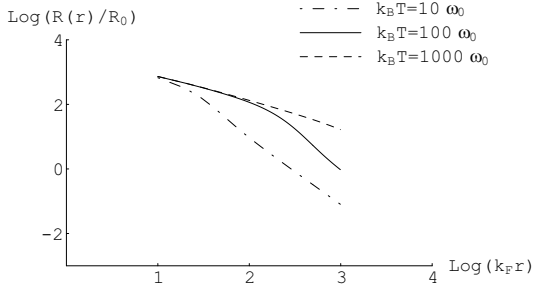


図 4.3: S 波 vortex における核磁気緩和率の r 依存性

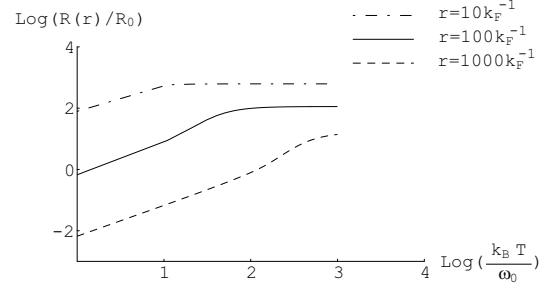


図 4.4: S 波 vortex における核磁気緩和率の T 依存性

(a)、 r 依存性について

- r の増加に伴ない単調減少する。
- r の遠方において r^{-2} で減衰する。特に低温において顕著になっている。
- 高温の場合 $r = 0$ の近傍において r^{-1} で増加する。

(b)、 T 依存性について

- T の増加に伴ない単調増加する。
- 高温極限において一定になる。特に vortex 近傍において顕著である。
- 遠方領域で $\frac{k_B T}{\omega_0} \ll k_F r$ の時、 T に比例して変化する。

上記の特徴で漸近形に関する事は次の議論から示せる。

(3.100) 式より $k_F r \ll \frac{k_B T}{\omega_0}$ の時には

$$\begin{aligned}
 R(r) &\simeq \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\varepsilon_1} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{3}{16\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}} \\
 &\simeq \frac{\pi}{4\omega_0^2} \frac{3}{16\pi^2 \xi^2 r^2} \int_0^{\varepsilon_1} d\varepsilon \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}} \\
 &= \frac{3}{64\pi \xi^2 r \omega_0} \ln\left(\frac{(k_F r)^{2/3}}{0.71}\right) \\
 &\propto r^{-1} \ln r
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

よってこの領域では温度依存性を持たなくなる。

$k_F r \gg \frac{k_B T}{\omega_0}$ の時には

$$\begin{aligned}
 R(r) &\simeq \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\varepsilon_1} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{3}{16\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}} \\
 &\simeq \frac{\pi}{4\omega_0^2} \frac{3}{16\pi^2 \xi^2 r^2} \int_0^{\infty} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \\
 &= \frac{3}{64\pi \xi^2 r^2 \omega_0^2} \frac{2}{\beta} \\
 &\propto \frac{1}{r^2 \beta}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

これが r の遠方に対する漸近形となる。

[2]、カイラル p 波 positive vortex の場合

この時の結果は S 波 vortex の場合と共通点が多い。緩和率の値のオーダーもほぼ同じである。

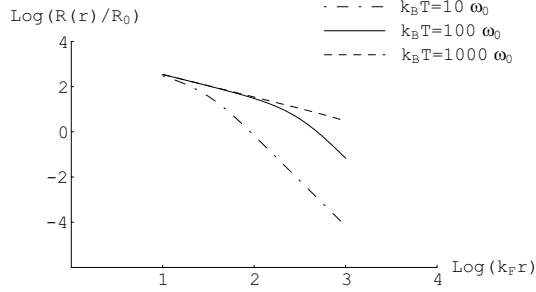


図 4.5: カイラル p 波 positive vortex における核磁気緩和率の r 依存性

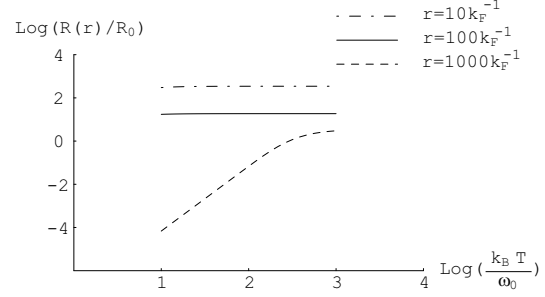


図 4.6: カイラル p 波 positive vortex における核磁気緩和率の T 依存性

(a)、 r 依存性について

- r の増加に伴ない単調減少する。
- r の遠方において r^{-4} で減衰する。特に低温において顕著になる。
- 高温の場合 r の近傍において r^{-1} で変化する。

(b)、 T 依存性について

- T の増加に伴ない単調増加する。
- 高温極限において一定になる。特に vortex 近傍において顕著である。
- 遠方領域で $\frac{k_B T}{\omega_0} \ll k_F r$ の時、 T^3 に比例して変化する。

上記の特徴にあげられた漸近形を次の議論から示す。

(3.132) 式より $k_F r \ll \frac{k_B T}{\omega_0}$ の時には

$$\begin{aligned}
 R(r) &\simeq \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{k_F r \omega_0} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \\
 &\simeq \frac{1}{8\pi \xi^2 r^2 \omega_0^2} \int_0^{k_F r \omega_0} d\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \\
 &= \frac{k_F}{24\pi \xi^2 r \omega_0} \\
 &\propto r^{-1}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

よってこの領域では温度依存性を持たなくなる。

また $k_F r \gg \frac{k_B T}{\omega_0}$ の時には

$$\begin{aligned}
 R(r) &\simeq \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{k_F r \omega_0} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \\
 &\simeq \frac{1}{8\pi k_F^2 \xi^2 r^4 \omega_0^4} \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \\
 &= \frac{\pi}{12 k_F^2 \xi^2 r^4 \omega_0^4 \beta^3} \\
 &\propto \frac{1}{r^4 \beta^3}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

これが r の遠方に対する漸近形となる。

[3]、カイラル p 波 negative vortex の場合

この場合、緩和率は S 波 vortex や p 波 positive vortex のそれに比べ微量になる。

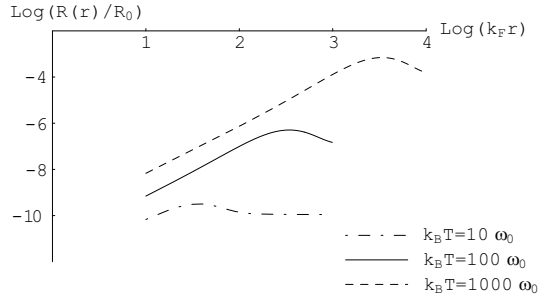


図 4.7: カイラル p 波 negative vortex における核磁気緩和率の r 依存性

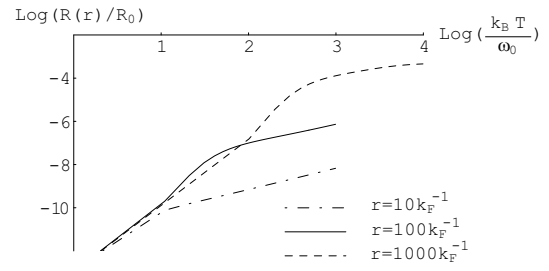


図 4.8: カイラル p 波 negative vortex における核磁気緩和率の T 依存性

(a)、 r 依存性について

- vortex 近傍ではその中心から離れるにつれ増加し $k_F r \sim \frac{k_B T}{\omega_0}$ においてピークを持つ。その後減少し遠方で一定値に落ち着く。

(b)、 T 依存性について

- T の増加に伴ない単調増加する。
- vortex 近傍において $k_F r \omega_0 \ll k_B T \ll \Delta_\infty$ が成立するとき T に比例して変化する。

上記の特徴にあげられた漸近形を次の議論から示す。

(3.156) 式より $k_F r \gg \frac{k_B T}{\omega_0}$ の時には³

$$\begin{aligned}
R(r) &\simeq \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\varepsilon_1} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}} \\
&\simeq \frac{1}{8\pi k_F^2 \xi^2 \omega_0^4} \frac{m^2}{k_F^2} \left(1 - \frac{\Delta_\infty}{\omega_0 k_F \xi}\right)^2 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{\varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}} \\
&\simeq \frac{m^2}{8\pi k_F^4 \xi^2 \omega_0^4} \left(1 - \frac{\Delta_\infty}{\omega_0 k_F \xi}\right)^2 \int_0^\infty d\varepsilon \frac{\varepsilon^2}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \\
&= \frac{m^2}{8\pi k_F^4 \xi^2 \omega_0^4} \left(1 - \frac{\Delta_\infty}{\omega_0 k_F \xi}\right)^2 \frac{2\pi^2}{3\beta^3} \\
&\propto \frac{1}{\beta^3}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

これが r の遠方に対する漸近形となる。

得られた結果の適応領域について述べておく。この結果は第2章に基づくものであり本来 $1 \ll k_F r \ll k_F \xi$ の領域でしか適応できない。またスペクトルに関して低エネルギー領域 ($\varepsilon \ll \Delta_\infty$) を考えていたので3.3節における $A(r, \varepsilon)$ はその領域でしか正しい評価を与えない。したがって $k_B T \sim \Delta_\infty$ 程度の高温になると結果の信頼性は大きく落ちることになる。

実際今回の結果において $T \rightarrow T_c, r \rightarrow \infty$ としても $R(r)/R_0 \rightarrow 1$ とはなっておらず高温極限で正常状態を再現できていない。⁴ またここでは vortex 束縛状態の励起スペクトルを連続的なものに近似して考えたが $k_B T \sim \omega_0$ の低温においてはエネルギーの量子性が本質的になり、それを考慮すると核磁気緩和率において本研究では得られなかった階段的な変化を見出すことができたと思われる。今回の計算において $1 \ll k_F r \ll k_F \xi$ の領域に対する核磁気緩和率の表式は簡潔な形に書き下すことができず数値的評価に頼らざるおえなかったことを付け加えておく。

³ $k_F^{-1} \ll r \ll \xi$ として $\bar{\psi}(r) \simeq \frac{m}{k_F} \left(1 - \frac{\Delta_\infty}{\omega_0 k_F \xi}\right)$ を用いた。

⁴ これは励起スペクトルにおいてエネルギーギャップの上側に存在する散乱状態を考慮していないことによる。

第5章 議論とまとめ

5.1 準古典理論との比較

第3章で導出した核磁気緩和率の表式は準古典理論で求まる表式とよく一致する。それを以下で示す。

[1]、S波 vortex の場合

今回 Caroli、de Genne、Matricon の手法を用いて核磁気緩和率の表式（(3.99)、(3.100) 式）を得た。ここで $k_F^{-1} \ll r \ll \xi$ の領域に着目すると、 $r_c < r$ （つまり $\varepsilon_c > \varepsilon$ ）の表式による寄与は無視でき

$$\begin{aligned} R(r) &\simeq \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\varepsilon_1} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{3}{16\pi^2\xi^2r^2} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}} \\ &= \frac{3}{64\pi\xi^2r^2\omega_0^2} \int_0^{\{k_F r - 0.71(k_F r)^{1/3}\}\omega_0} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}} \end{aligned} \quad (5.1)$$

一方、準古典理論により核磁気緩和率は以下のように与えられる。

$$R_{sc}(r) = \frac{\pi v_F^2 N_0^2}{8C^2 E'^2 r^2} \int_0^{E' r} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{1 + \frac{\varepsilon^2}{E'^2 r^2}}{1 - \frac{\varepsilon^2}{E'^2 r^2}} \quad (5.2)$$

ここで N_0 はフェルミ面における状態密度であり、 $r \ll \xi$ においてオーダーとして

$$C \sim \xi, \quad E' \sim \frac{\Delta_\infty}{\xi} \sim k_F \omega_0 \quad (5.3)$$

が成立する。2次元フェルミ粒子系に対する表式 $N_0 = \frac{m}{2\pi}$ を用いると

$$\sim \frac{1}{32\pi\xi^2r^2\omega_0^2} \int_0^{k_F r \omega_0} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{1 + \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}}{1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}}$$

さらにこの式の ε 積分で重要な領域が $\varepsilon \sim k_F r \omega_0$ であることを考慮すると

$$\begin{aligned} R_{sc}(r) &\sim \frac{1}{32\pi\xi^2r^2\omega_0^2} \int_0^{k_F r \omega_0} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{2}{(1 + \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0})(1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0})} \\ &\sim \frac{1}{32\pi\xi^2r^2\omega_0^2} \int_0^{k_F r \omega_0} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{k_F r \omega_0}} \end{aligned} \quad (5.4)$$

を得る。

(5.1) 式と (5.4) 式を比べると

- 係数因子の違い（ $R/R_{sc} = \frac{3}{2}$ ）
- $R_{cs}(r)$ の表式では $\varepsilon = k_F r \omega_0$ においてカットオフが行われておらず発散する。

の2点を除いては完全に一致していることがわかる。

[2]、カイラル p 波 positive vortex の場合

$k_F^{-1} \ll r \ll \xi$ の領域に着目し、今回求めた核磁気緩和率の表式 ((3.131)、(3.132) 式) において $r_c < r$ (つまり $\varepsilon_c > \varepsilon$) からくる寄与を無視すると

$$\begin{aligned} R(r) &\simeq \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{k_F r \omega_0} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{1}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \\ &= \frac{1}{8\pi \xi^2 r^2 \omega_0^2} \int_0^{k_F r \omega_0} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

一方、準古典理論によりカイラル p 波 positive vortex に対する核磁気緩和率は以下のように与えられる。

$$R_{sc}(r) = \frac{\pi v_F^2 N_0^2}{2C^2 E'^2 r^2} \int_0^{E' r} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{\varepsilon^2}{E'^2 r^2} \quad (5.6)$$

(5.3) 式を用いると

$$\sim \frac{1}{8\pi \xi^2 r^2 \omega_0^2} \int_0^{k_F r \omega_0} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} \quad (5.7)$$

したがって Caroli らの手法から求まる (5.5) 式と完全に一致する。

[3]、カイラル p 波 negative vortex の場合

$k_F^{-1} \ll r \ll \xi$ に対し得られた表式は (3.155)、(3.156) 式より

$$\begin{aligned} R(r) &= \frac{\pi}{4\omega_0^2} \left[\int_0^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{e^{-4K(r)}}{2\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}} + \int_{\varepsilon_2}^{\Delta_\infty} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{e^{-4K(r)}}{\pi^2 \xi^2 r^2} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{\frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} - 1} \right] \\ &\simeq \frac{1}{8\pi \xi^2 r^2 \omega_0^2} \left[\int_0^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}} + 2 \int_{\varepsilon_2}^{\Delta_\infty} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{\bar{\psi}^2(r) \varepsilon^2}{\frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} - 1} \right] \\ &\simeq \frac{1}{8\pi \xi^2 \omega_0^2} \frac{m^2}{k_F^2} \left(1 - \frac{\Delta_\infty}{\omega_0 k_F \xi}\right)^2 \left[\int_0^{\varepsilon_1} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{\varepsilon^2}{1 - \frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2}} \right. \\ &\quad \left. + 2 \int_{\varepsilon_2}^{\Delta_\infty} \frac{d\varepsilon}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \frac{\varepsilon^2}{\frac{\varepsilon^2}{k_F^2 r^2 \omega_0^2} - 1} \right] \end{aligned} \quad (5.8)$$

第4章に示した結果のように (5.8) 式でもとまる値は S 波や positive vortex の場合に比べ無視できるほど小さくなる。このことについて少し考察する。

いま無次元量として $k_F r = x$, $\varepsilon/\omega_0 = y$ を導入すると positive vortex に対する緩和率 $R_p(r)$ は (5.5) 式より

$$\begin{aligned} R_p(r) &= \frac{1}{8\pi \xi^2 k_F^{-2}} \frac{1}{x^4 \omega_0} f_p(x) \\ \text{但し} \\ f_p(x) &= \int_0^x dy \frac{y^2}{\cosh^2(\frac{\beta\omega_0}{2} y)} \end{aligned} \quad (5.9)$$

また negative vortex に対する緩和率 $R_n(r)$ は (5.8) 式より

$$R_n(r) = \frac{1}{8\pi\xi^2 k_F^{-2}} \frac{m^2 \omega_0}{k_F^4} \left(1 - \frac{\Delta_\infty}{\omega_0 k_F \xi}\right)^2 f_n(x)$$

但し

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \int_0^{y_1} \frac{dy}{\cosh^2(\frac{\beta\omega_0}{2}y)} \frac{y^2}{1 - \frac{y^2}{x^2}} + 2 \int_{y_2}^{\frac{\Delta_\infty}{\omega_0}} \frac{dy}{\cosh^2(\frac{\beta\omega_0}{2}y)} \frac{y^2}{\frac{y^2}{x^2} - 1} \\ y_1 &= x - 0.42x^{1/3} \\ y_2 &= x + 0.42x^{1/3} \end{aligned} \quad (5.10)$$

(5.9)、(5.10) 式における $f_p(r)$, $f_n(r)$ の値の大きさの比較が図 5.1 においてなされている。ここでは $f_p(r)$, $f_n(r)$ を同じオーダーの量として考えることにする。 $(r=0)$ 近傍や高温領域では結構無理があるが。¹このとき $(1 - \frac{\Delta_\infty}{\omega_0 k_F \xi})^2$ の因子を別にして²

$$\begin{aligned} R_n(r)/R_p(r) &\sim \frac{m^2 \omega_0}{k_F^4} \bigg/ \frac{1}{x^4 \omega_0} \\ &\sim \frac{1}{k_F^4 \xi^4} \bigg/ \frac{1}{x^4} \\ &= \frac{r^4}{\xi^4} \ll 1 \end{aligned} \quad (5.11)$$

よって negative vortex の緩和率は positive vortex のそれに比べて十分小さいことがわかる。

一方、準古典理論でも negative vortex に対する核磁気緩和率は完全にゼロとなる結果が得られている。したがってこの場合も準古典理論による結果を支持することになる。

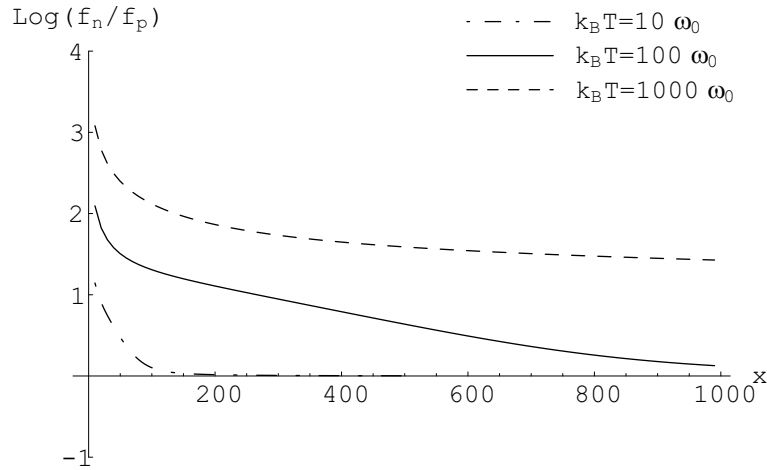


図 5.1: $f_n(x)/f_p(x)$ の x 依存性

¹図 5.1 より $1 \ll x \ll 10000 \equiv k_F \xi$ かつ $k_B T \ll \Delta_\infty \sim 10^4 \omega_0$ の領域において f_n/f_p の値は最大でも 10^3 程度の値におさまる。したがって (5.11) の結果をゆるがすことにはならない。

² $\Delta(r) = \Delta_\infty \tanh \frac{r}{\xi}$ を仮定すると $(1 - \frac{\Delta_\infty}{\omega_0 k_F \xi})^2 \simeq 0.031$ となる。この因子を考慮するとむしろ (5.11) の結果を強調することになる。

5.2 カイラル p 波 negative vortex の結果に関する考察

カイラル p 波 negative vortex の核磁気緩和率は positive vortex のそれに比べて無視できるほど小さくなる結果が得られた。それについて考える。

(3.63) 式よりカイラル p 波における核磁気緩和率は

$$\begin{aligned} R(\mathbf{r}) &= \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\Delta_\infty} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} \sum_{l,m} \delta_{\varepsilon_l,\varepsilon} \delta_{\varepsilon_m,\varepsilon} |u_l(\mathbf{r})u_m^*(\mathbf{r}) - v_l(\mathbf{r})v_m^*(\mathbf{r})|^2 \\ &= \frac{\pi}{4\omega_0^2} \int_0^{\Delta_\infty} d\varepsilon \frac{1}{\cosh^2(\frac{\beta\varepsilon}{2})} ||u_n(\mathbf{r})|^2 - |v_n(\mathbf{r})|^2|^2 \end{aligned}$$

但し、 u_n, v_n において

$$\varepsilon_n = \varepsilon \quad (5.12)$$

となるように n の値をとっている。この式を見てわかるように negative vortex において緩和率が消失するのは $|u_n(\mathbf{r})|^2 - |v_n(\mathbf{r})|^2$ がゼロになることに起因する。この因子はコヒーレンス因子と呼ばれるもので BCS 理論においても登場し、核磁気緩和率に関する重要な量になっている。今の場合 $\sum_{l,m} \delta_{\varepsilon_l,\varepsilon} \delta_{\varepsilon_m,\varepsilon}$ 、つまり状態密度がゼロになるわけではないことを注意しておく。

このことを少し詳しく見てみる。結果での図 4.5 と図 4.7 を比べると $r = 0$ の近傍でその違いが顕著なのでその部分に着目する。 u_n, v_n において $r = 0$ 周辺での絶対値が最も大きくなるように n の値をとると、その振る舞いは negative vortex の場合も positive vortex の場合もだいたい図 5.2 のようになる。但し漸近形の評価において誤差が生じるので $r = 0$ に至るまでは図示していない。

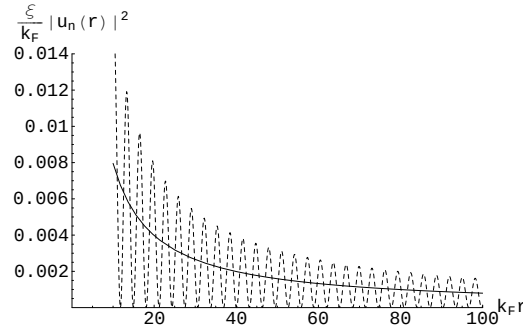


図 5.2: $r = 0$ 周辺での絶対値が最大となるような n に対応する確率振幅 $|u_n|^2$ の振る舞い $10 < k_F r < 100$ の領域に限りプロットした。点線が波数 k_F 程度の振動をあらわに描いたもので、実線がそれを平均化したときの漸近線を表す。

図 5.2 に示した量 $|u_n(\mathbf{r})|^2$ は局所状態密度 $N(\mathbf{r}, \varepsilon) = \sum_n [|u_n(\mathbf{r})|^2 \delta(\varepsilon - \varepsilon_n) + |v_n(\mathbf{r})|^2 \delta(\varepsilon + \varepsilon_n)]$ の $\varepsilon > 0$ における表式に対応しており、図から $r \rightarrow 0$ において $N(\mathbf{r}, \varepsilon)$ はゼロにならないことがわかる。(むしろ増加している。) したがって上述したように核磁気緩和率がゼロになるのは $|u_n|$ と $|v_n|$ が等しくなることが原因となっている。

コヒーレンス因子 $|u_n(\mathbf{r})|^2 - |v_n(\mathbf{r})|^2$ がゼロになる上でクーパーペアのカイラリティが大きく関係している。このことを次に述べる。

negative vortex の場合、B-dG 方程式を解く際 $\Delta(\mathbf{r})$ ($\Delta^*(\mathbf{r})$) と $\square^+$ ($\square^-$) の位相因子 $e^{\pm i\theta}$ が打ち消しあい、結果的に u_n と v_n が同じ量子数を持った角運動量固有状態となっている。それに伴い vortex 近傍における解の表式は次のように書ける。

$$\begin{pmatrix} |u_n(r)| \\ |v_n(r)| \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} |J_n(k_F r) + \mathcal{O}(\frac{n}{\xi k_F} \frac{r}{\xi})| \\ |J_n(k_F r) + \mathcal{O}(\frac{n}{\xi k_F} \frac{r}{\xi})| \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

したがって $|u_n| - |v_n|$ は $\mathcal{O}(\frac{n}{\xi k_F} \frac{r}{\xi})$ の微少量を無視するとゼロとなる。これからコヒーレンス因子がゼロとなり核磁気緩和率が消滅するのである。negative vortex はクーパーペアの相対運動における回転と重心運動における回転が互いに反対方向になった状態で、その渦度（あるいは角運動量）の大きさは等しくなっている。そのため vortex の中では相対運動と重心運動の回転が打ち消しあい仮想的に渦度がゼロになった状態といえる。このことと関連して u_n と v_n が同じ量子数の角運動量固有状態となっているものと考えられる。

一方、positive vortex の場合は状況が異なる。この時クーパーペアの相対運動と重心運動の回転は同方向となり渦度の仮想的な相殺は起きない。そして u_n と v_n は異なる量子数の角運動量固有状態で表され vortex 近傍において

$$\begin{pmatrix} |u_n(r)| \\ |v_n(r)| \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} |J_n(k_F r + \mathcal{O}(\frac{n}{k_F^2 \xi^2}))| \\ |J_{n-2}(k_F r + \mathcal{O}(\frac{n}{k_F^2 \xi^2}))| \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

となる。よって $|u_n| - |v_n|$ は微少量 $\frac{n}{k_F^2 \xi^2}$ に関するゼロ次のオーダーの評価においても有限の値を持ち negative vortex の場合に比べずっと大きくなる。これに伴い核磁気緩和率も negative vortex との比で断然大きくなるわけである。

以上の議論よりカイラル p 波 negative vortex の核磁気緩和率が非常に小さくなる上で

- コヒーレンス因子
- クーパーペアの相対運動と重心運動におけるカイラリティ

が深く関係していることがわかる。

5.3 実験に対する提案

本研究の結果から次のことがいえる。

- ★ 十分低温 ($\omega_0 \ll k_B T \ll \Delta_\infty$) かつ vortex 近傍 ($k_F^{-1} \ll r \ll \xi$) において核磁気緩和率の比 $R(r)/R_0$ (R_0 は転移温度における正常状態での核磁気緩和率である。) は、S 波 vortex とカイラル p 波 positive vortex の場合 $10^{-2} \sim 10^2$ 程度であり、カイラル p 波 negative vortex の場合は $10^{-10} \sim 10^{-6}$ と非常に小さくなる。(但し本研究では $k_F \xi = 10000$ と設定して評価した。)

したがってカイラル p 波超伝導体において positive vortex であるか negative vortex であるかに応じて核磁気緩和率の比 R/R_0 が大きく異なり、どちらの状態が実現しているか実験的に調べることができる。また仮に 2 つの状態によりドメイン構造ができたとしたら各領域ごとにはっきりと異なる核磁気緩和率が観測されるはずであり、このことを利用して各状態が実現する割合を見積もることができる。それに関して以下で説明する。

カイラル p 波超伝導体が静磁場中に置かれ positive vortex と negative vortex によるドメイン構造ができた状況を考える。各領域における vortex を一つ取り上げた時 core 近傍での磁場の侵入具合は positive vortex と negative vortex でほぼ同じであるでしょう。この時 vortex core 近傍だけ共鳴するような高調波を加えてスピン・フリップを起こすと、それにより消滅する核スピンによる磁化の大きさは 2 つの状態と同じになる。(原子の空間分布は positive vortex と negative vortex で同じであり、各サイトにおいて原子の感じる磁場の分布が同じであるため。) この様子を表したのが図 5.3 である。図には侵入磁場に対して垂直な平面が示されており、positive vortex と negative vortex における侵入磁場の空間分布が描かれている。vortex 中心近傍のみ共鳴が起こるような周波数 ν の高調波がかけられた状況を設定しており、その電磁波のスペクトルにおける線幅を $d\nu$ とした。平面上の射影部は共鳴により核磁化の消失が起こる領域を表しておりこの時消滅する磁化の大きさを M_c とした。

仮に今考えている試料において positive vortex が n_p 個、negative vortex が n_n 個存在したとすると、高調波を止めた時の positive vortex による磁化の回復は $M_c n_p$ 、negative vortex による磁化の回復は $M_c n_n$

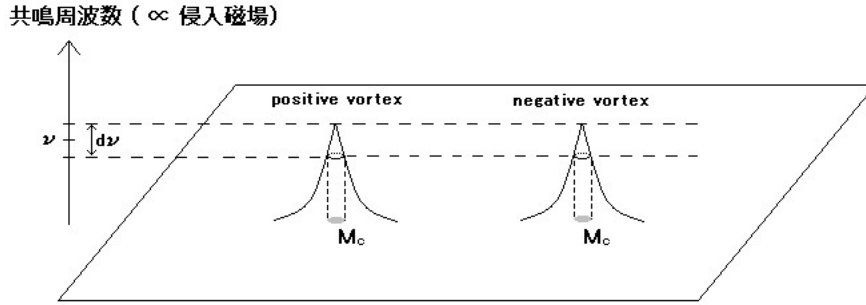


図 5.3: vortex 中心における高調波による核磁化の消滅

侵入磁場に対して垂直な平面における positive vortex と negative vortex の磁場の空間分布が示してある。vortex 中心でスピン・フリップが起こるように周波数 ν 、線幅 $d\nu$ の高調波がかけられており、その時消失する磁化の量を M_c とした。射影部分は核磁化の消失が起こる領域を表している。(ちなみにゼーマン分裂によるエネルギー間隔は侵入磁場に比例するため共鳴周波数もそれに比例する。)

となる。実験によりこの時の磁化を時間を追って測定すると、2つの vortex で緩和時間が大きく異なるため各々のドメインにおいて回復する磁化の大きさを区別できるようなデータが得られると考えている。その様子を図 5.4 に示した。positive vortex における核磁気緩和時間を T_p 、negative vortex における核磁気緩和時間を T_n とした。(核磁気緩和率を R とすると緩和時間 T は $T = 1/R$ と表される。) 核磁気緩和率の結果から T_p は T_n よりずっと小さいことがいえるので negative vortex における核磁化がほとんど変化しないうちに positive vortex における核磁化の回復が起こることになる。そしてそれ以後の核磁化の変化を negative vortex による寄与と解釈できるであろう。この 2つの磁化の大きさを比較することにより $M_c n_p / M_c n_n$ 、つまり positive vortex と negative vortex の数の比 n_p / n_n が求まる。図に示した磁化の変化ではそれほど明確に 2つの過程を区別することはできないが、実際は T_n / T_p が例えば 10^4 程度となり $M_c n_p$ と $M_c n_n$ を明確に見積もることができるはずである。

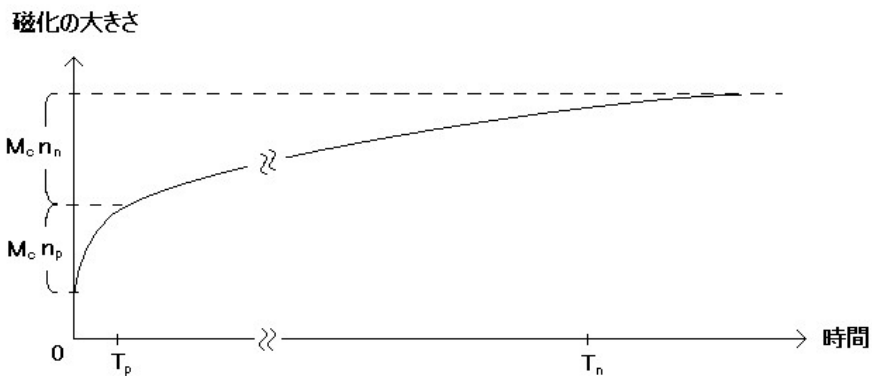


図 5.4: positive vortex と negative vortex によるドメイン構造になった試料における高調波を切った後の磁化の時間変化

positive vortex における核磁気緩和時間を T_p 、negative vortex における核磁気緩和時間を T_n とした。本文の表記より positive vortex (negative vortex) において回復する磁化の大きさは $M_c n_p$ ($M_c n_n$) となっている。

5.4 本研究の位置づけと今後の課題

今回 vortex が単独で存在する系における核磁気緩和率を計算し準古典理論と一致する結果が得られた。ただし本研究では negative vortex に対する値を摂動における高次の量を用いて有限な量として導出するなど準古典理論のものより高い精度で緩和率を求めることができた。この理論の一致は行った計算の正当性を示唆するものであり更に研究を進める上での理論的土台になると考えている。

今後の研究の進展としては量子効果が現れるような領域で B-dG 方程式の解析することが挙げられる。本研究においては vortex 束縛状態の準位間隔 ω_0 を十分小さいとしてスペクトルを連続的なものとして扱ったが低温領域 ($k_B T \sim \omega_0$) 程度ではその量子性が重要になる。この研究の方法を拡張すれば量子性を解析的に扱うことが可能であり、これにより準古典理論では扱うことのできない新しい解析結果を得ることができるはずである。

第 1 章で述べたようにカイラル p 波渦糸格子状態における核磁気緩和率の大きさは positive vortex と negative vortex でそれほど変わらないという結果が Takigawa らによって得られている。現在 vortex の研究において露呈されている課題の一つとして、この原因が vortex を複数扱ったことにあるのかバンド構造が異方性を持つことにあるのかそれともエネルギー準位の量子性にあるのかを追求することが挙げられる。量子性を考慮して B-dG 方程式を解析することはこの問題の答えを与える一つの方法であると考えている。

5.5 まとめ

本研究では S 波 vortex、カイラル p 波 positive vortex、カイラル p 波 negative vortex の場合に対し Caroli, de Gennes, Matricon らの方法を用いて B-dG 方程式を解き核磁気緩和率を計算した。計算過程において B-dG 方程式の解におけるフェルミ波数程度の激しい振動を Bessel 関数の漸近形を用いて平均化し評価のしやすい表式を導いた。そこから各々の場合の核磁気緩和率を数值的に計算した。得られた結果より S 波 vortex とカイラル p 波 positive vortex の核磁気緩和率の大きさは同程度であり negative vortex の場合は無視できるほど値が小さくなることがわかった。($k_F \xi = 10000$ とした時 $R(r)/R_0$ は positive vortex において $10^{-2} \sim 10^2$ 程度、negative vortex において $10^{-10} \sim 10^{-6}$ 程度になる。) このことから緩和率の測定により実験的に positive vortex と negative vortex を区別することができ、2 つの状態がドメイン構造をとる時には各々の状態の実現する割合を観測できることを述べた。

今回求めた表式は準古典理論から示唆されるものとよく一致しており準古典理論の結果を支持するかたちとなった。Takigawa らによる B-dG 方程式の数値解析では positive vortex と negative vortex で大きさとしてほとんど変わらない値として核磁気緩和率が導出されており、これが今回の結果と相反するものとなっている。この矛盾を解決することが残された課題であり、本研究で用いた手法を拡張することにより問題解決に向けた進展が期待できると考えている。

付 録 A : 準古典理論

超伝導の微視的理論としてはゴリコフ方程式、あるいは Bogoliubov-de Gennes 方程式が挙げられる。しかし、これらの方程式は、弱結合近似でしか成立しない。また空間スケールについてフェルミ波長程度の情報も全て含んでいる。多くの超伝導体ではコヒーレンス長はフェルミ波長に比べてずっと長く、超伝導特性を調べる際には、コヒーレンス長程度の空間分解能を持つ理論で十分である。そこで、フェルミ波長程度の空間スケールに関する情報を縮約し、かつ強結合効果も取り入れることのできる理論を構成する研究が 1960 年代から 70 年代にかけてに行われた。1964 年に Andreev[26] は、いわゆる「Andreev 反射」を議論する際に、Bogoliubov-de Gennes 方程式に幾何光学近似を適用した方程式を用いた。この方程式は、のちに Andreev 方程式と呼ばれる。1968 年に Eilenberger は、Gorkov 方程式を、フェルミ面付近の情報だけを含む物理量で閉じた方程式に書き直し、いわゆる Eilenberger 方程式あるいは準古典方程式と呼ばれる方程式を導出した [27]。同年 Larkin と Ovchinnikov はより簡潔な形で準古典方程式を導出した [28]。さらに強結合領域、非平衡状態への拡張が Eliashberg によって 1971 年に行われている [29]。1983 年には ^3He ヘリウム 3 の超流動状態への適用を念頭においた準古典理論について Serene と Rainer によって総合報告がなされている [30]。準古典理論の長所と短所は以下のとおりである。長所としては、上述の 2 点のほかに、渦糸状態のように空間的に一様でない場合の扱いに適している点である。空間変化がある系の場合、空間的に一様な場合にくらべて、計算量が膨大になるためである。さらに S 波以外のペアリングをもつ超伝導体の場合、対の振幅、あるいは秩序変数がクーパー対の相対座標にも依存するために、空間変化がある場合には準古典理論が自然な形式を与える点も重要な長所である。短所としては、準古典理論に現れるグリーン関数（これを準古典グリーン関数と呼ぶ）の物理的意味が捉えにくい点が挙げられる。また銅酸化物超伝導体の場合には、コヒーレンス長が短いために準古典近似そのものが適用できないと考えられている。以下では準古典方程式を具体的に書き下し、それによって渦糸状態の核磁気緩和率がどのように表されるのかを述べ、S 波、カイラル P 波の場合について渦糸状態における核磁気緩和率の結果を述べる。

A.1 準古典方程式

まず S 波の場合について述べてから、カイラル P 波の場合にどのように修正されるかを述べる。第 2 章で定義した Gorkov の Green 関数

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\langle T\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, \tau)\psi_{\uparrow}^{\dagger}(\mathbf{r}', \tau') \rangle, F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle T\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}, \tau)\psi_{\downarrow}(\mathbf{r}', \tau') \rangle, F^{\dagger}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \langle T\psi_{\downarrow}(\mathbf{r}, \tau)\psi_{\uparrow}(\mathbf{r}', \tau') \rangle, \quad (\text{A.1})$$

を出発点とする。ここで $\mathbf{x} = (\mathbf{r}, \tau), \mathbf{x}' = (\mathbf{r}', \tau')$ であるとする。ここで Gorkov の Green 関数を 2 行 2 列の行列形式

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \begin{pmatrix} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') & F(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ -F^{\dagger}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') & G(\mathbf{x}', \mathbf{x}) \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

と定義する。つぎにこれを虚時間について Fourier 級数展開し、

$$\hat{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = T \sum_{i\omega_n} e^{-i\omega_n(\tau-\tau')} \hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\omega_n) \quad (\text{A.3})$$

さらに二つの空間座標を重心座標 $\mathbf{R} = (\mathbf{r} + \mathbf{r}')/2$ と相対座標 $\bar{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ にわけて、空間座標について混合表示の Green 関数

$$\hat{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\omega_n) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \hat{G}_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) e^{i\mathbf{k} \cdot \bar{\mathbf{r}}}$$

を得る。この混合表示の Green 関数を運動量の方向を固定しつつエネルギー $\xi_{\mathbf{k}} = \hbar^2 k^2 / (2m)$ について積分した結果得られる物理量

$$\hat{g}_{\hat{\mathbf{k}}}(\mathbf{R}) = \int d\xi_{\mathbf{k}} \hat{G}_{\mathbf{k}}(\mathbf{R}) \quad (\text{A.4})$$

を準古典 Green 関数と呼ぶ。ここで、 $\hat{\mathbf{k}}$ は $\mathbf{k}$ 方向の単位ベクトルである。 $G_{\mathbf{k}}(\mathbf{R})$ や、ベクトルポテンシャル、秩序変数が緩やかに変化する関数である場合には、準古典 Green 関数は以下の方程式を満たす:

$$-i\mathbf{v}(\mathbf{k}) \cdot \nabla \hat{g}_{\hat{\mathbf{k}}}(\mathbf{r}) = \left[i\omega_n \tau_3 - \hat{\Delta}(\mathbf{r}) - \frac{|e|\hbar}{m} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \tau_3, \hat{g}_{\hat{\mathbf{k}}}(\mathbf{r}) \right]. \quad (\text{A.5})$$

ここで、 $\mathbf{v}(\mathbf{k})$ はフェルミ面の $\mathbf{k}$ 方向の群速度を表し、 $\hat{\Delta}(\mathbf{r})$ は以下の 2 行 2 列の行列

$$\hat{\Delta}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(\mathbf{r}) \\ -\Delta^*(\mathbf{r}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

を表すものとする。この方程式と規格化条件

$$\hat{g}_{\hat{\mathbf{k}}}^2(\mathbf{r}) = -\pi^2 \hbar^2 \quad (\text{A.7})$$

をあわせて Eilenberger 方程式あるいは準古典方程式と呼ぶ。ここで重要な点は、この準古典 Green 関数は、 $k_F \xi \gg 1$ の場合に成立する方程式であり、その場合には、秩序変数、自己エネルギー補正、超伝導電流、動的帯磁率を計算するのに十分な情報を与えることである。さてここまではペアリングが S 波の場合について述べてきたが、カイラル P 波の場合も同様の結果が得られている。すなわち、(A.5) の中の $\hat{\Delta}(\mathbf{r})$ を

$$\hat{\Delta}(\mathbf{r}) \rightarrow \hat{\Delta}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = \begin{pmatrix} 0 & \Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) \\ -\Delta^*(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

と置き換えればよい。

A.2 準古典 Green 関数を用いた核磁気緩和率の表式

第 3 章で定義されている 核磁気緩和率 $R(\mathbf{r})$ は局所的な動的帯磁率 $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{r}, i\Omega_n)$ を用いて表される。さて

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\omega_n) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}; i\omega_n) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} \\ F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\omega_n) = \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} F_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}; i\omega_n) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}$$

を用いると

$$\begin{aligned} & \chi_{-,+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\Omega_n) \\ &= -T \sum_{i\omega_n} \{ G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\omega_n) G^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\Omega - i\omega_n) + F^*(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\omega_n) F(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; i\Omega - i\omega_n) \} \\ & \quad -T \sum_{i\omega_n} \left\{ \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} G_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}; i\omega_n) \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'} G_{-\mathbf{k}'}^*(\mathbf{r}; i\Omega - i\omega_n) \pm \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} F_{-\mathbf{k}}^*(\mathbf{r}; i\omega_n) \frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}'} F_{\mathbf{k}'}(\mathbf{r}; i\Omega - i\omega_n) \right\} \\ &= -N_0^2 T \sum_{i\omega_n} \left\{ \langle g_{11}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}; i\omega_n) \rangle_{\theta} \langle g_{11}^*(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}; i\Omega - i\omega_n) \rangle_{\theta} \pm \langle g_{12}^*(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}; i\omega_n) \rangle \langle g_{12}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}; i\Omega - i\omega_n) \rangle \right\}. \quad (\text{A.9}) \end{aligned}$$

と表される。ここで $\langle \dots \rangle$ はフェルミ面上での平均を表す。また複合のうち、上の符号は S 波を、下の符号はカイラル P 波を表す。さらにここで準古典 Green 関数に対してフェルミ面で平均したスペクトル関数

$$\langle \hat{g}_{11}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}; i\omega_n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{a_g(\mathbf{r}; \omega)}{i\omega_n - \omega}, \quad \langle \hat{g}_{12}(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}; i\omega_n) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{a_f(\mathbf{r}; \omega)}{i\omega_n - \omega}$$

を定義し、次の公式

$$T \sum_{i\omega_n} \frac{1}{(i\omega_n - \omega)(i\Omega - i\omega_n - \omega')} = \frac{f(-\omega') - f(\omega)}{\omega + \omega' - i\Omega},$$

を用いると、(A.9) は次のように書きなおせる；

$$\begin{aligned} & \chi_{-,+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\Omega_n) \\ = & N_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi} \frac{f(\omega') - f(\omega)}{\omega - \omega' - i\Omega} \{a_g(\mathbf{r}; \omega) a_g^*(\mathbf{r}; \omega') \pm a_f^*(\mathbf{r}; -\omega) a_f(\mathbf{r}; -\omega')\}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

これより核磁気緩和率は

$$\begin{aligned} R(\mathbf{r}) &= T \lim_{\Omega \rightarrow 0} \text{Im} \chi_{-,+}(\mathbf{r}, \mathbf{r}; i\Omega_n \rightarrow \Omega + i\delta) / \Omega \\ &= N_0^2 T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{4\pi} (-\partial f(\omega) / \partial \omega) \{a_g(\mathbf{r}; \omega) a_g^*(\mathbf{r}; \omega) + a_f^*(\mathbf{r}; -\omega) a_f(\mathbf{r}; -\omega)\} \\ &= N_0^2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{16\pi} \frac{|a_g(\mathbf{r}; \omega)|^2 \pm |a_f(\mathbf{r}; \omega)|^2}{\cosh^2(\beta\omega/2)} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

と与えられる。

A.3 渦糸状態における核磁気緩和率

渦糸の中心近くでの核磁気緩和率は、近似的ながらも解析的な表式を得ることができる。本論文の Bogoliubov-deGennes 方程式における結果と比較することを念頭において、準古典近似による結果のその近似の内容をまとめておくことにする。以下ではフェルミ面は2次元的で等方的であるものとし、ペアポテンシャルが次のような形をしている場合について考える。

$$\Delta(\mathbf{r}, \hat{\mathbf{k}}) = \Delta_0(r) e^{i\theta} e^{iN\alpha}. \quad (\text{A.12})$$

ここで $\Delta_0(r)$ は単調増加関数とし $\Delta_0(r=0) = 0$ と $\lim_{r \rightarrow \infty} \Delta_0(r) = \Delta_\infty$ という境界条件を満たすものとする。この表式は回転対称な孤立した渦糸を表し、その渦度は +1 である。整数 N は S 波の場合にゼロ、カイラル P 波の場合、+1 (positive vortex) または -1 (negative vortex) の値をとるものとする。 $e^{i\alpha} = \hat{k}_x + i\hat{k}_y$ とする。

さて準古典近似において核磁気緩和率を計算するには、スペクトル関数 a_g, a_f の表式が得られればよい。準古典近似の場合にも、渦糸周りに束縛状態ができる。とくに低温の場合には、バルクのギャップ Δ_∞ の下にできるこの束縛状態の寄与が重要になる。これは Bogoliubov-deGennes 方程式における Caroli-deGennes-Matricon モードに対応するが、物理的には、むしろ SNS 接合におけるアンドレーエフ束縛状態に近い。さてこの束縛状態からの寄与は $|\omega| \ll \Delta_\infty, |r| \ll \xi$ が満たされる時にはスペクトル強度の大部分を占め、かつその解析的な表式を得ることができる。S 波の場合には

$$a_g(\mathbf{r}, \omega) = N(\mathbf{r}, \omega) / N_0, \quad a_f(\mathbf{r}, \omega) = i e^{i\theta} (\omega / (E' r)) a_g \quad (\text{A.13})$$

ここで $N(\mathbf{r}, \omega)$ は束縛状態の局所状態密度

$$N(\omega, \mathbf{r}) = -\pi^{-1} N_0 \langle \text{Im} g(\omega, \mathbf{r}, \theta) \rangle_\theta = \frac{N_0 v \Theta(E' r - |\omega|)}{2C \sqrt{E'^2 r^2 - \omega^2}}. \quad (\text{A.14})$$

(Θ はヘビサイドの階段関数) を表し、 E' は

$$E' = \frac{1}{C} \int_0^\infty ds \frac{\Delta_0(s)}{s} e^{-u(s)}. \quad (\text{A.15})$$

$$u(s) = \frac{2}{v} \int_0^{|s|} ds' \Delta_0(s') \quad (\text{A.16})$$

$$C = \int_0^\infty ds \exp[-u(s)] \sim \xi_0 \quad (\text{A.17})$$

として与えられる。これらの結果から S 波に対して

$$R(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{2} \int_0^{E'r} \frac{d\omega N^2(\omega, \mathbf{r})}{\cosh^2(\beta\omega/2)} \left(1 + \frac{\omega^2}{E'^2 r^2}\right) \quad (\text{A.18})$$

$$= \frac{\pi v^2 N_0^2}{8C^2 E'^2 r^2} \int_0^{\beta E' r} \frac{d\omega}{\cosh^2(\beta\omega/2)} \frac{E'^2 r^2 + \omega^2}{E'^2 r^2 - \omega^2} \quad (\text{A.19})$$

を得る。さてカイラル P 波については $N = 1$ (positive vortex) のとき

$$a_g(\mathbf{r}, \omega) = N(\mathbf{r}, \omega)/N_0, \quad a_f(\mathbf{r}, \omega) = ie^{i2\theta} \{1 - 2\omega^2/(E'r)^2\} a_g \quad (\text{A.20})$$

$N = -1$ のとき

$$a_g(\mathbf{r}, \omega) = N(\mathbf{r}, \omega)/N_0, \quad a_f(\mathbf{r}, \omega) = ia_g \quad (\text{A.21})$$

となる。これらを $R(r)$ の表式に代入すると $N = 1$ (positive vortex) のとき

$$R(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{2} \int_0^{E'r} \frac{d\omega N^2(\omega, \mathbf{r})}{\cosh^2(\beta\omega/2)} \left[1 - \{1 - 2\omega^2/(E'r)^2\}^2\right] \quad (\text{A.22})$$

$$= \frac{\pi v^2 N_0^2 T^3}{2C^2 E'^4 r^4} \int_0^{\beta E' r} \frac{dx x^2}{\cosh^2(x/2)} \quad (\text{A.23})$$

を得る。一方で、 $N = -1$ (negative vortex) の場合には

$$R(r) = 0 \quad (\text{A.24})$$

ということになる。

参考文献

- [1] Y. Maeno, et al., Nature **372**, 532 (1994).
- [2] J. R. Schrieffer, *Theory of Superconductivity*, (Addison-Wesley 1964).
- [3] A. P. Mackenzie and Y. Maeno, Rev. of Modern Phys. **75**, 657 (2003).
- [4] K. Ishida, et al., Phys. Rev. B **56**, R505 (1997).
- [5] A. P. Mackenzie, et al., Phys. Rev. Lett. **80**, 161 (1998).
- [6] P. W. Anderson, Phys. Rev. Lett. **3**, 325 (1959).
- [7] T. M. Rice and M. Sigrist, J. Phys. :Condens. Matter **7**, L643 (1995).
- [8] K. Ishida, et al., Nature **396**, 658 (1998).
- [9] G. M. Luke, et al., Nature **394**, 558 (1998).
- [10] U. Essmann and H. Träuble, Phys. Lett. **24A**, 526 (1967).
- [11] H. F. Hess, et al., Phys. Rev. Lett. **62**, 214 (1989).
- [12] P. G. de Gennes, *Superconductivity of Metals and Alloys*, (Perseus Books, 1999).
- [13] C. Caroli, P. G. de Gennes, and J. Matricon, Phys. Lett. **9**, 307 (1964).
- [14] R. Heeb and D. F. Agterberg, Phys. Rev. B **59**, 7076 (1998).
- [15] F. Gygi and M. Schlüter, Phys. Rev. B **43**, 7609 (1991).
- [16] M. Matsumoto and M. Sigrist, Physica B **281-282** (2000) 973
- [17] M. Matsumoto and M. Sigrist, J. Phys. Soc. Jpn. **68**, 724 (1999).
- [18] G.E.Volovok, JETP Lett. **70**, 609 (1999)
- [19] Y. Kato, J.Phys.Soc,Jpn **69**, 3378 (2000) (cond-mat/0009296)
- [20] N. Hayashi and Y. Kato, Physica C **388-389**, 513(2003); Y. Kato nd N. Hayashi, Physica C **388-389**, 519 (2003).
- [21] M. Takigawa *et al.* Phys. Rev. Lett. **83** (1999) 3057; J. Phys. Soc. Jpn. **69** (2000) 3943; J. Phys. Chem. Solids **63**, 1333 (2002).
- [22] 益田義賀、核磁気共鳴の基礎 (丸善、1985).
- [23] W. Fite ▪ and A.G.Redfield, Phys. Rev. Lett. **17**, 381 (1966)
- [24] R. Leadon and H. Suhl, Phys. Rev. **165**, 596 (1967).
- [25] 宮津 純、東京大学修士論文 (2002).

- [26] A. F. Andreev: Zh. Eksp. Teor. Fiz. **46**,1823 (1964)[Sov. Phys. JETP **19**, 1228 (1964)].
- [27] G. Eilenberger: Z. Phys. **214**, 195 (1968).
- [28] A. Larkin and Yu. Ovchinnikov: Zh. Eksp. Teor. Fiz. **55**, 2262 (1968) [Sov. Phys. JETP **28**, 1200 (1969)].
- [29] G. M. Eliashberg: Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61**, 1254 (1971) [Sov. Phys. JETP **34**, 668 (1972)].
- [30] J. W. Serene and D. Rainer: Phys. Reports **101**, 221 (1983).

謝辞

本研究において終始ご指導していただいた加藤雄介助教授に心から感謝します。いかなる時も親切に接していただきどれだけ心の支えになったわかりません。そのおかげもありよい院生生活を送れたと思っています。

同研究室で一緒であった鈴木正博士にも深く感謝します。小さな質問にも根気よく答えてもらい本当にありがとうございました。また修士1年の時には植野洋介氏にも大変お世話になりました。勉強以外でも面白い話をしていただき楽しかったです。

吉岡研の皆様にも感謝しています。吉岡大二郎教授には一年次の輪講やランチセミナーでご指導いただきありがとうございました。また野村健太郎博士、濱田晃一氏にも色々なことでお世話になり感謝しております。