

2005 年度冬学期 振動波動論 解答例

第 1 問

1.

弦の微小部分 $x \sim x + \Delta x$ に及ぼされる y 方向の力は、弦の x 軸に対する傾きが十分小さいとすれば

$$F_y = T \frac{\partial f(x + \Delta x, t)}{\partial x} - T \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}$$

となる．ここで $|\theta| \ll 1$ のとき $\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta$ であることを用いている．右辺第一項を Taylor 展開して二次の微小量以上の項を無視すると

$$F_y = T \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \Delta x$$

となるのでこれを用いて弦の微小部分の運動方程式を立てると

$$\begin{aligned} \rho \Delta x \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} &= T \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} \Delta x \\ \Leftrightarrow \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial x^2} &= 0 \dots (\text{答}) \end{aligned}$$

2.

問題文の (1) 式を t で微分する．

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= \int_0^\ell dx \left[\frac{\rho}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \frac{T}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \right] \\ &= \int_0^\ell dx \left[\rho \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + T \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right] \\ &= T \int_0^\ell dx \left[\rho \frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} \right] \\ &= T \int_0^\ell dx \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} \right] \\ &= T \left[\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x} \right]_0^\ell \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上で題意は満たされた．

3.

問題文図 2. より

$$f(x, 0) = \begin{cases} \frac{4b}{\ell}x & (0 \leq x \leq \frac{\ell}{4}) \\ -\frac{4b}{3\ell}x + \frac{4b}{3} & (\frac{\ell}{4} \leq x \leq \ell) \end{cases}$$

なのでこれを以下の式

$$E(t=0) = \int_0^\ell dx \frac{T}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2$$

に代入すると

$$\begin{aligned} E(t=0) &= \frac{T}{2} \left[\left(\frac{4b}{\ell} \right)^2 \int_0^{\ell/4} dx + \left(-\frac{4b}{3\ell} \right)^2 \int_{\ell/4}^\ell dx \right] \\ &= \frac{8b^2T}{3\ell} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$