

2005 年度冬学期 振動波動論 解答例

第 1 問

1.

左側のおもりを 1、右側のおもりを 2 とする。それぞれの運動方程式は

$$\begin{aligned}m\ddot{x}_1 &= -kx_1 + k(x_2 - x_1) = k(x_2 - 2x_1) \\m\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1)\end{aligned}$$

となるのでまとめて書くと

$$\begin{pmatrix} m\ddot{x}_1 \\ m\ddot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & k \\ k & -k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdots (\text{答})$$

2.

質点系の振動現象において全ての質点の運動が同じ周期であること。基準振動の個数は質点系の自由度と等しく、系の振動はそれらの線形結合で与えられる。

3.

x_1, x_2 を基準振動として

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \cos(\omega t + \phi) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

とおき (ω は基準振動数)、運動方程式に代入すると

$$\begin{aligned}-m\omega^2 \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} &= k \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{m\omega^2}{k} - 2 & 1 \\ 1 & \frac{m\omega^2}{k} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)\end{aligned}$$

よって基準振動数を求めるための固有値方程式は

$$\begin{vmatrix} \frac{m\omega^2}{k} - 2 & 1 \\ 1 & \frac{m\omega^2}{k} - 1 \end{vmatrix} = 0 \cdots (\text{答})$$

4.

上の固有値方程式を解く。

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} \frac{m\omega^2}{k} - 2 & 1 \\ 1 & \frac{m\omega^2}{k} - 1 \end{vmatrix} = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{m\omega^2}{k} - 2 \right) \left(\frac{m\omega^2}{k} - 1 \right) - 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & m^2\omega^4 - 3km\omega^2 + k^2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \omega^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \left(\frac{k}{m} \right) \end{aligned}$$

ここで

$$\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$$

であることを用いれば

$$\omega = \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \dots (\text{答})$$

5.

4. で求めた ω を (1) 式に代入すると

$$\begin{aligned} \omega = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ のとき、} & \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \\ \omega = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ のとき、} & \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = C_2 \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

なので基準振動解は

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= C_1 \cos\left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_1\right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}+1}{2} \\ -1 \end{pmatrix} \dots (\text{答}) \\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi_2\right) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \dots (\text{答}) \end{aligned}$$