

## 2005 年度冬学期 振動波動論 解答例

### 第 1 問

(1)

特性方程式は  $3\lambda^2 + 7\lambda + 2 = 0$  で、その解は  $\lambda = -\frac{1}{3}, -2$  なので

$$\text{基本解は} \quad y = \exp\left(-\frac{1}{3}x\right), \exp(-2x) \cdots (\text{答})$$

$$\text{一般解は} \quad y = C_1 \exp\left(-\frac{1}{3}x\right) + C_2 \exp(-2x) \cdots (\text{答})$$

(2)

特性方程式は  $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$  で、その解は  $\lambda = 1$ (重解) なので

$$\text{基本解は} \quad y = \exp x, x \exp x \cdots (\text{答})$$

$$\text{一般解は} \quad y = C_1 \exp x + C_2 x \exp x \cdots (\text{答})$$

(3)

特性方程式は  $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$  で、その解は  $\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$  なので

$$\text{基本解は} \quad y = \exp\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}x\right), \exp\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}x\right) \cdots (\text{答})$$

$$\text{一般解は} \quad y = C_1 \exp\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}x\right) + C_2 \exp\left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}x\right) \cdots (\text{答})$$

また、特性方程式の解が実数ではないので

$$\text{基本解を} \quad y = \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdots (\text{答})$$

$$\text{一般解を} \quad y = C_1 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + C_2 \exp\left(-\frac{1}{2}x\right) \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdots (\text{答})$$

としてもよい。

## 第2問

(4)

$y = C \exp(x)$  として (4) 式に代入すると

$$C \exp(x) + 5C \exp(x) + 6C \exp(x) = C \exp(x)$$

となるので  $C = \frac{1}{12}$  とすればよい.

したがって特解は  $y = \frac{1}{12} \exp(x) \cdots (\text{答})$

(5)

$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$  として (5) 式に代入すると

$$(5C_1 + 5C_2) \cos x + (-5C_1 + 5C_2) \sin x = \cos x$$

となる. 両辺係数比較すると

$$\begin{cases} 5C_1 + 5C_2 = 1 \\ -5C_1 + 5C_2 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{10} \\ C_2 = \frac{1}{10} \end{cases}$$

したがって特解は  $y = \frac{1}{10} \cos x + \frac{1}{10} \sin x \cdots (\text{答})$

### 第3問

1.

$\operatorname{Re}(f \exp(i\omega t)) = f \cos \omega t$  かつ微分演算子には線形性があるため... (答)

2.

$\tilde{y} = B(\omega) \exp(i\omega t)$  を (7) 式代入して整理すると

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dx^2} \{B(\omega) \exp(i\omega t)\} + 2\kappa \frac{d}{dx} \{B(\omega) \exp(i\omega t)\} + \omega_0^2 \{B(\omega) \exp(i\omega t)\} = f \exp(i\omega t) \\ \Leftrightarrow & -\omega^2 B(\omega) + 2i\kappa\omega B(\omega) + \omega_0^2 B(\omega) = f \\ \Leftrightarrow & B(\omega) = \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\kappa\omega} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(B(\omega) \exp(i\omega t)) &= \operatorname{Re} \left[ \frac{f}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2i\kappa\omega} \exp(i\omega t) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{f(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\kappa\omega)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\kappa\omega)^2} (\cos \omega t + i \sin \omega t) \right] \\ &= \frac{f}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\kappa\omega)^2} \{(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2\kappa\omega \sin \omega t\} \cdots (\text{答}) \end{aligned}$$