

振動・波動論 レポート課題5 解答例

第1問

$\cos x$ の原点まわりでのテイラー級数は

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

で与えられる。それをグラフにしたのが図1である。 $y = \cos x$ 以外の4つの曲線はそれぞれ

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!}$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!}$$

$$y = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!}$$

を表している。

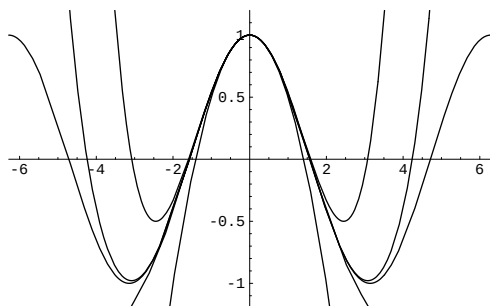


図1: $y = \cos x$ のグラフとその原点周りのテーラー級数のグラフ

第2問

$f(x)$ は偶関数であるから $\cos x$ だけを用いてフーリエ級数展開できる。

$$\begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^2} \cos n\pi x \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x + \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi x + \frac{4}{25\pi^2} \cos 5\pi x + \cdots \end{aligned}$$

上の式で $\sim$ は平均収束の意味。グラフは図2のとおり。一番上は $y = 1 - |x|$ と

$$y = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x$$

2番目のグラフは $y = 1 - |x|$ と

$$y = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos \pi x + \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi x$$

(黒い線) 一番下のグラフは 2 番目のグラフは $y = 1 - |x|$ と

$$y = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \cos n\pi x + \frac{4}{9\pi^2} \cos 3\pi x + \frac{4}{25\pi^2} \cos 5\pi x$$

の曲線形を描いたものである。級数の項を増やしていくと近似がよくなることがわかる。

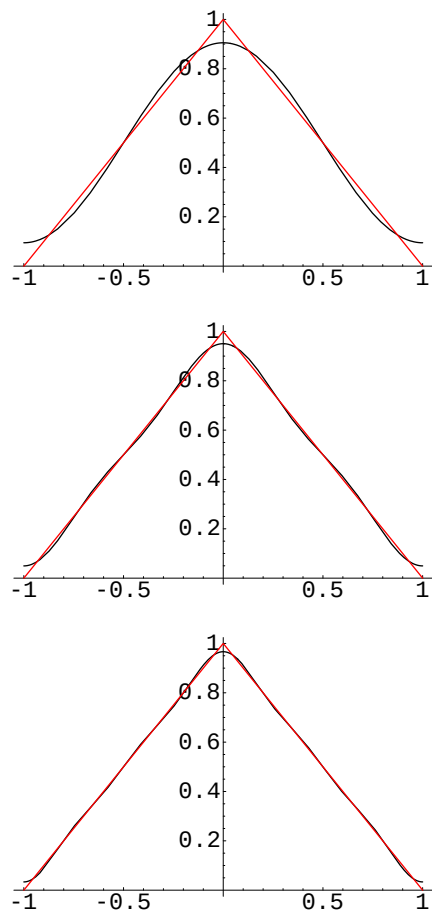


図 2: