

振動・波動論 レポート課題4 解答例

第1問

1.

$$m \frac{d^2}{dt^2} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2k & k & 0 & 0 \\ k & -2k & k & 0 \\ 0 & k & -2k & k \\ 0 & 0 & k & -2k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

2. すべての質点の位置座標が共通の時間依存性をもつ運動状態のこと。または運動方程式の解のうち、そのような運動状態を表す解のこと。振動系の運動方程式の一般解は基準振動の重ねあわせで書くことができる。すなわち、解の集合がなす線形空間の基底をなす。

今の場合、基準振動は

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{pmatrix} = \cos(\omega t + \phi) \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

と表すことができる。

3. 基準振動の表式 (2) を運動方程式 (1) に代入すると固有値方程式

$$\begin{pmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{pmatrix} = 0$$

を得る。ただし $\lambda = m\omega^2/k$ とおいた。

$$\begin{vmatrix} \lambda - 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda - 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda - 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^4 - 3(\lambda - 2)^2 + 1$$

より、固有値問題が自明でない解を持つためには

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}} = 2 \pm \frac{\sqrt{5} \pm 1}{2}$$

であることが必要条件である。固有値の小さいものから

$$\lambda_{\text{I}} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_{\text{II}} = \frac{5 - \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_{\text{III}} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_{\text{IV}} = \frac{5 + \sqrt{5}}{2}$$

とするとそれぞれに対応する固有ベクトルは

$$\lambda_I \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{II} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{III} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda_{IV} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。図 1 は $(i, \sqrt{\lambda_\alpha})$ ($\alpha = I, II, III, IV$) をプロットしたものである。図 2 は固有値に対

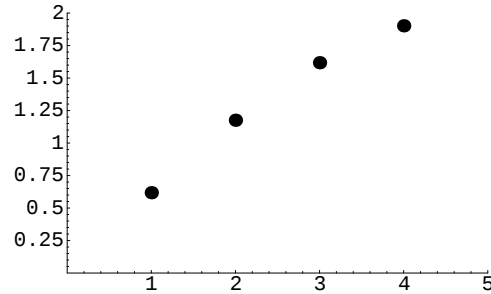


図 1: 各基準振動に対する固有振動数。縦軸は ω_α を $\sqrt{k/m}$ で割ったもの、すなわち $\sqrt{\lambda_\alpha}$ である。横軸は基準振動のインデックス α を表す。

応する固有ベクトルを (i, A_i^α) として表したもので一番上から順に $\alpha = I, II, III, IV$ に対応する固有ベクトルである。実は図 1 も図 2 も、ある曲線を引くことでそれぞれの振る舞いを系統的に理解することができる。講義ノートの $N = 2, 3$ の場合と合わせて考えてみて一般の N に対する固有値、固有ベクトルに対する解析解を予想することができたなら、自分のセンスに大いに自信を持ってよい。

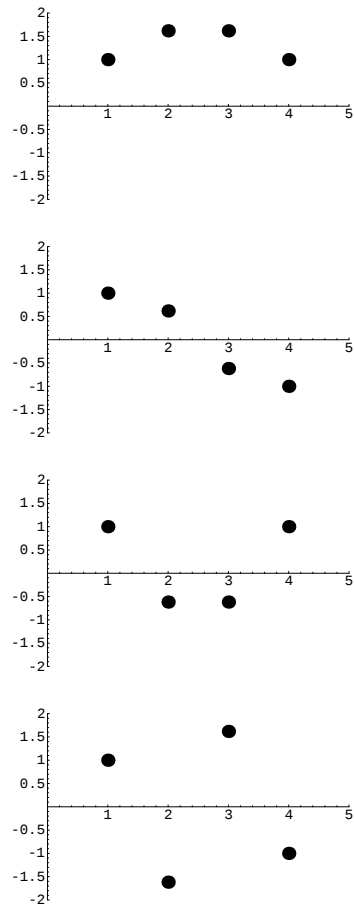


図 2: 各基準振動に対応する固有ベクトル