

振動・波動論 レポート課題3 解答例

第1問

講義ノート、1-18 を参照して、微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\kappa \frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0 \quad (1)$$

に対して初期条件 $y(t=0) = y_0$, $\frac{dy}{dt}|_{t=0} = v_0$ を満たす解を求める。過減衰 $\kappa > \omega_0$ の場合の解は

$$y(t) = \frac{v_0 + \kappa y_0}{\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}} e^{-\kappa t} \cosh\left(\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} t\right) + \frac{v_0}{\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}} e^{-\kappa t} \sinh\left(\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} t\right) \quad (2)$$

で与えられる。さてこの中で時間依存性を含む部分に注目すると

$$e^{-\kappa t} \left\{ \begin{array}{l} \cosh\left(\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} t\right) \\ \sinh\left(\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2} t\right) \end{array} \right\} = e^{-(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2})t} f_{\pm}(t) \quad (3)$$

と書けることがわかる。ここで

$$f_{\pm}(t) = \frac{1 \pm e^{-2\sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}t}}{2} \quad (4)$$

は $t \rightarrow \infty$ のとき定数 $(1/2)$ に収束する関数である。よって緩和時間は

$$\tau = 1/(\kappa - \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2}) = (\kappa + \sqrt{\kappa^2 - \omega_0^2})/\omega_0^2 = \frac{2\kappa}{\omega_0^2} \left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\omega_0^2}{\kappa^2}\right)\right)$$

で与えられる。 κ が減少し、臨界減衰 ($\omega_0 = \kappa$) に近づくにつれて緩和が速くなることがわかる。また緩和時間は初期条件 (y_0, v_0 の値) にはよらないことも明らかである。緩和時間は過減衰のとき、 κ に比例し、減衰振動のときに $1/\kappa$ に比例する点に注目してほしい。

追記：レポート課題文に誤りがあったので訂正する。

誤 「さて問題。1-19 のグラフから過減衰 ($\kappa > \omega_0$) において κ が**大きくなるにつれて**, 減衰が速くなることがわかる。」

正 「さて問題。1-19 のグラフから過減衰 ($\kappa > \omega_0$) において κ が**小さくなるにつれて**, 減衰が速くなることがわかる。」

第2問

講義ノート 1-19 のグラフを参照すること。ただし f も与える必要がある。