

振動・波動論 レポート課題Ⅰ 解答例

原子を 1,2 と名前を付ける。それぞれの運動方程式は

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}_i} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x_i}, \frac{\partial U}{\partial y_i}, \frac{\partial U}{\partial z_i} \right), \quad i = 1, 2 \quad (1)$$

で与えられる。2 粒子系の解析における常套手段として、上の運動方程式から重心座標 $\mathbf{R} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ と相対座標 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ に対する運動方程式

$$(2m) \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = 0, \quad \frac{m}{2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \quad (2)$$

に分離する。第 2 式の左辺における $m/2$ は、相対運動に対する換算質量である。重心運動は相互作用に無関係であるので、以下では相対運動についてのみ議論する。 U の具体的な関数形を代入すると

$$\frac{m}{2} \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = F(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad F(r) = \frac{12A}{r^{13}} - \frac{6B}{r^7} \quad (3)$$

を得る。 F_r は動径方向の力の成分を与える。右辺がゼロになる地点

$$r = r_0 = \left(\frac{2A}{B} \right)^{1/6}$$

が平衡点を与える。グラフにすると図のようになり、 $r > r_0$ で引力、 $r < r_0$ で斥力になっていることがわかる。

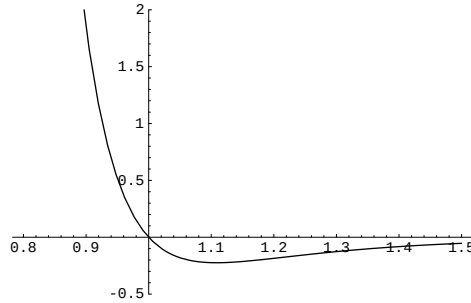


図 1: F_r の距離依存性。横軸は r/r_0 を表す。

F_r を $r = r_0$ まわりでテイラー展開し、最初の項だけを残すと

$$F_r = -2^{2/3} 9 A^{-4/3} B^{7/3} (r - r_0) + \dots$$

となる。 $(r - r_0)$ の前の係数の部分がバネ定数に相当する。換算質量は $m/2$ なので、固有振動数 ω_0 が

$$\omega_0 = 2^{5/6} 3 A^{-2/3} B^{7/6} m^{-1/2}$$

である単振動と等価である。周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2^{1/6} 3^{-1} \pi A^{2/3} B^{-7/6} m^{1/2}$$

で与えられる。

この問題でのポイントは、2 粒子系の運動を重心運動と相対運動に分離することと、平衡点まわりで力をテイラー展開して単振動の運動方程式と等価であることを示すことの 2 点である。