量子力学II レポート課題I　解答例　　担当；加藤雄介

問題 1.1
まず方針として、$H_n(\xi)$ から $H_{n+1}(\xi)$ を作る演算子と $H_n(\xi)$ から $H_{n-1}(\xi)$ を作る演算子を構成する。(1.51) の両辺を微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}H_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi} &= (-1)^n \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\exp\left(\xi^2\right)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}\exp\left(-\xi^2\right)\right) \\ &= (-1)^n\left(2\xi\exp\left(\xi^2\right)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}\exp\left(-\xi^2\right)+\exp\left(\xi^2\right)\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\xi^{n+1}}\exp\left(-\xi^2\right)\right) \\ &= 2\xi H_n(\xi)-H_{n+1}(\xi) \qquad (1)\end{aligned}$$

より

$$H_{n+1}(\xi)=\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}+2\xi\right)H_n(\xi) \qquad (2)$$

を得る 次に (1.51) において $n\to n+1$ としたものを以下のように変形する

$$\begin{aligned}H_{n+1}(\xi) &= (-1)^{n+1}\exp\left(\xi^2\right)\frac{\mathrm{d}^{n+1}}{\mathrm{d}\xi^{n+1}}\exp\left(-\xi^2\right) \\ &= (-1)^{n+1}\exp\left(\xi^2\right)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}\left((-2\xi)\exp\left(-\xi^2\right)\right) \\ &= (-1)^{n+1}\exp\left(\xi^2\right)\left((-2\xi)\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\xi^n}\exp\left(-\xi^2\right)-2n\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\xi^{n-1}}\exp\left(-\xi^2\right)\right) \\ &= 2\xi H_n(\xi)-2nH_{n-1}(\xi) \qquad (3)\end{aligned}$$

を得る. (2) と (3) から $H_{n+1}(\xi)$ を消去すると

$$\frac{\mathrm{d}H_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=2nH_{n-1}(\xi) \qquad (4)$$

を得る (4) の両辺に $\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}+2\xi\right)$ を作用させると

$$\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}+2\xi\right)\frac{\mathrm{d}H_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi}=2n\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}+2\xi\right)H_{n-1}(\xi)=2nH_n(\xi) \qquad (5)$$

を得る。二番目の等号では、(2)（において $n\to n-1$ としたもの）を用いた。(5) の最左辺と最右辺を整理すると

$$\frac{\mathrm{d}^2H_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi^2}-2\xi\frac{\mathrm{d}H_n(\xi)}{\mathrm{d}\xi}+2nH_n(\xi)=0 \qquad (6)$$

を得る（証明終わり）

問題 1.2
まず (1.55) の右辺において (4) を用い, さらに部分積分と (2) を用いると

$$I_n = \frac{1}{2(n+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi H_n(\xi)\frac{\mathrm{d}H_{n+1}}{\mathrm{d}\xi}\exp(-\xi^2) \qquad (7)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(n+1)}\Big[H_n(\xi)H_{n+1}(\xi)\exp(-\xi^2)\Big]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{2(n+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi H_{n+1}(\xi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\Big(H_n(\xi)\exp(-\xi^2)\Big) \\
&= 0 + \frac{1}{2(n+1)}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\exp(-\xi^2)H_{n+1}(\xi)\underbrace{\left(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}+2\xi\right)H_n(\xi)}_{H_{n+1}(\xi)} \\
&= \frac{I_{n+1}}{2(n+1)} \qquad (8)
\end{aligned}
$$

を得る 初期値

$$
I_0 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}\xi\exp(-\xi^2) = \sqrt{\pi} \qquad (9)
$$

と漸化式 (8) を合わせて

$$
I_n = 2^n n! \pi^{1/2} \qquad (10)
$$

を得る。

問題 1.3

講義プリント参照。