

物理学 B (力学) 第二回レポートの解説・講評

永井佑紀

平成 17 年 7 月 24 日

3-17

摩擦力に注意しましょう。

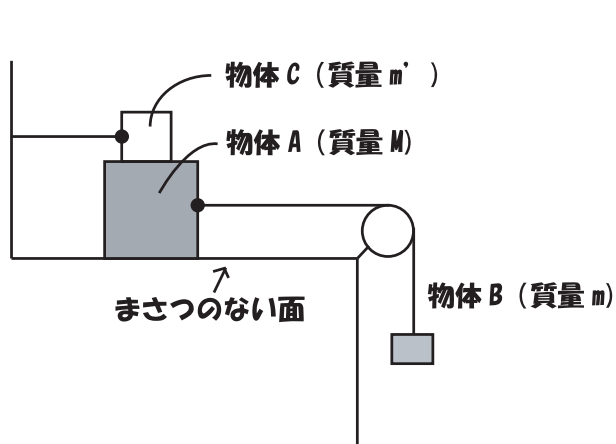


図 1: 問題のシチュエーション

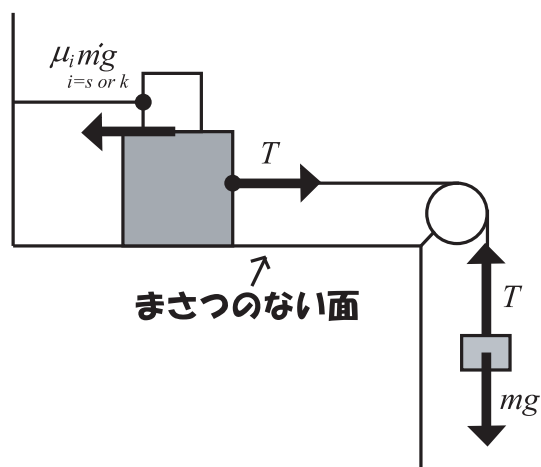


図 2: 動こうとする方向に働いている力

解答例

物体 A、物体 B に関する運動方程式を立てる。物体 A の運動方程式は、張力を T 、摩擦力を f_A 、右向きを x 軸正として

$$M\vec{a} = T\hat{x} + f_A(-\hat{x}) \quad (1)$$

$$Ma(\hat{x}) = (T\hat{x} - f_A)\hat{x} \quad (2)$$

となり、物体 B の運動方程式は

$$m\vec{a} = T\hat{y} + mg(-\hat{y}) \quad (3)$$

$$m(-a)\hat{y} = (T - mg)\hat{y} \quad (4)$$

となる。

1. A,B が静止しうる m の最大値を求めよ

A,B が静止しているので $a = 0$ であり、摩擦力 f_A は静止摩擦力である。最大静止摩擦力はその面にかかっている力に比例し、その比例係数は μ_s であるから

$$f_A = \mu_s m' g \quad (5)$$

である。したがって、

$$T = f_A = \mu_s m' g \quad (6)$$

$$T = mg \quad (7)$$

$$\mu_s m' = m \quad (8)$$

のとき、最大の静止摩擦力がかかっており、これ以上物体 B を重くすると動き出してしまう。よってこれが m の最大値である。

2. A,B が等加速度運動するときの加速度 a を求めよ

式 (2)、式 (4) より

$$Ma = T - f_A \quad (9)$$

$$-ma = T - mg \quad (10)$$

という連立方程式が得られる。また、摩擦力 f_A は動摩擦力であり

$$f_A = \mu_k m' g \quad (11)$$

である。 T を消去して連立方程式を解くと

$$(M + m)a = -f_A + mg \quad (12)$$

$$a = \frac{m - \mu_k m'}{M + m} g \quad (13)$$

となる。

解説

大体の人がよくできていました。しかし、いまだに何にでも「つりあいの条件」を使う人がいるようです。動いているときは、 $T = mg$ ではありません。あと、何故か $f_A = (M + m)\mu_s g$ としている人がいました。力の矢印を書いているうちに混乱したのかもしれませんが、実際にやってみたときのことを思い出すとこのようなミスはしにくくなると思います。たとえば、自分が物体 C になったつもりで、摩擦力を考えてください。人を担げば摩擦力は増すと思いますが、足元の物体をより重いものに取り替えたところで摩擦はなににも変わらないでしょう。

3-20

円柱状容器内に液体と物体 m が入っている。物体の密度は液体のそれより小さいものとする。容器をターンテーブルに固定して回転させると物体はどちら向きに動くか？

実験してくれた人もいました。

解答例

解答：内側へ移動する。

外側へ行くか内側へ行くかということを考えているので、上下の運動を司る重力は無視する。そうすれば、ターンテーブルに乗っている観測者は、ターンテーブルの動径方向外向きの遠心力のみを感じていることになる。これは、ターンテーブルの動径方向外向きに重力がかかっていると考えても観測者にとっては変わらない。よって、問題は円柱状容器が重力中に置かれている状況に置き換わる。「重力」中においては、液体よりも密度の軽い物体は「浮力」を感じて「上」へ向かう。いま、「上」とは「重力」と反対向きであるから、物体は内側へ向かうということになる。

解説・講評

「液体の方が密度が大きく、かかる遠心力が大きいため物体は水に押しやられて内側へ行く」という解答が非常に多かった。個別のコメントにも書きましたが、これは理由になっていないので注意してください。「力が大きい」→「内側へ行く」というふうに説明されたある人が、「密度が大きいため力が大きいけど、密度が大きいためその分動きにくくなるけどそれでも内側へ行くの？」という疑問を呈した場合、どう補足説明をすればいいのでしょうか。

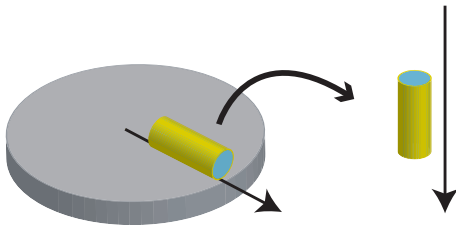


図 3: 浮力の問題への置き換え

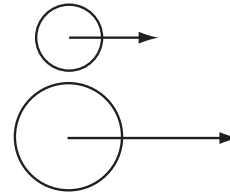


図 4: 大きな力がかかっていても質量が大きければ動きにくい

運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (14)$$

を見てみます。運動方程式の意味は「ある力 $\vec{F}$ を受けると、質量に比例して加速度 $\vec{a}$ が生じる」です。物体の動き具合を決めているのは「力」ではなく、「加速度」です。加速度が同じ物体は同じ振る舞いをしますよね？ 力 $\vec{F}$ が質量に比例して大きくなるとします。つまり、

$$\vec{F} = m\vec{f} \quad (15)$$

のときを考えます。運動方程式に代入すると、

$$m\vec{a} = m\vec{f} \quad (16)$$

となつて、加速度は質量に無関係に決まります。つまり、密度が大きかろうが小さかろうが、質量に比例するような力であれば加速度は変わらないのです。

したがって、解答になりうるのは「遠心力以外の力（質量に比例しない力）が働いておりそのせいで内側に加速度が生じている」ということを説明しているものだけです。

アルキメデスの原理を用いて具体的に浮力の大きさを求めようとしてくれたひとたちもいました。重力のかわりに遠心力がかかっているとみなせばアルキメデスの原理を用いることができます。残念ながら正しく浮力の大きさを見積もれた人はいませんでしたが、計算方法が間違っているだけで、論理としては正しかったです。というのは実は、授業で紹介されたアルキメデスの原理「浮力の大きさは、その物体が排除した流体の重さに等しい」における「物体が排除した流体の重さ」を具体的に計算するためには、各点各点で遠心力（浮力で考えれば重力）

が異なることをふまえてやらないといけなかったからです。これは学部一年生には少し難しかったと思います（正確にやるには極座標と体積積分が必要）。気になる人もいると思いますので、最後に浮力の具体的な計算を載せておきます。

問題 8

(1):おもりの運動方程式をたてよ

かかっている力は重力とばねの力であり、重力は y 軸負方向、ばねの力はつねに運動を妨げる方向に働くので、 y 軸負方向である。したがって、運動方程式は

$$m \frac{d^2 y}{dt^2} \hat{y} = mg(-\hat{y}) + ky(-\hat{y}) \quad (17)$$

となる。

(2):(1) で求めた微分方程式の解を、二つの定数（積分定数）を含む形で求めよ

運動方程式を、見覚えのある微分方程式の形にすることを考える。微分方程式

$$m \frac{d^2 y'}{dt^2} = -ky' \quad (18)$$

の解は知っているので、 $y' = y + y_k$ とおいて上式に代入してみると、

$$m \frac{d^2 y'}{dt^2} = -ky - ky_k \quad (19)$$

となるから、 $ky_k = mg$ と置けば、運動方程式が得られる。したがって、式 (18) を解き、 y' を y に戻せば、運動方程式の解となる。式 (18) の解は、積分定数 A 、 B を用いて

$$y' = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) \quad (20)$$

となるから、 $y = y' - mg/k$ より

$$y = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t\right) - \frac{mg}{k} \quad (21)$$

が運動方程式の解である。

(3):(2) の解において、積分定数を特定の値にとると、おもりが静止した状態を表す ($y(t) = y_0$ 、 $\frac{dy(t)}{dt} = 0$) このときおもりの静止位置を求めよ

A, B は t に依らないので（積分定数に t が入っているとそれは積分定数ではない）、どんな t をいれても $y(t) = 0$ を満たすためには、 $A = 0$ かつ $B = 0$ しかありえない。よって

$$y_0 = -\frac{mg}{k} \quad (22)$$

となる。これは、 $y_0 < 0$ なので、重力のせいではねが下方向に伸びて静止していることを示し、物理的な直感と一致する。

(4): $t = 0$ でおもりの位置 $y = 0$ 、速度 $\frac{dy}{dt} = 0$ であったとする。このときの $y(t)$ を求めよ

式 (21) に $t = 0$ を代入すると

$$y(0) = A - \frac{mg}{k} \quad (23)$$

となり、 $y(0) = 0$ であるから、

$$A = \frac{mg}{k} \quad (24)$$

となる。また、式 (21) を微分すると

$$\frac{dy}{dt} = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t) + B\sqrt{\frac{k}{m}} \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) \quad (25)$$

となり、 $t = 0$ で $\frac{dy}{dt} = 0$ であるから

$$0 = B\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (26)$$

$$B = 0 \quad (27)$$

となる。以上より積分定数が求まり、解は

$$y(t) = \frac{mg}{k} \cos(\sqrt{\frac{k}{m}}t) - \frac{mg}{k} \quad (28)$$

となる。この解は、 $t = 0$ のとき、 $y = 0$ 、 $\frac{dy}{dt} = 0$ を満たしている。

解説・講評

出てきた解が物理的にどのような状況なのかイメージできるようになると、間違いにくくなります。

ばねの力の向きを逆にしている人がそれなりにいました。上向きが y 正ときめているので、 y 軸方向に動いたときに働くばねの向きが正負を決めます。下向きにおもりが動いたとしてばねの向きを考えてしまった人は注意しましょう。

「 $A \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi) = 0$ より $\sqrt{\frac{k}{m}}t + \phi = n\pi$ (n は整数)」としている人も多かったです。これは $\phi = n\pi - \sqrt{\frac{k}{m}}t$ になってしまい、積分定数 ϕ が t に依っていることになります。積分定数は定数なので t は絶対に含みません。気をつけましょう。

変数を変換して (y を y' にしたりして) 自分の知っている微分方程式に直すと比較的楽に解くことができます。

3-20 解答例1 アルキメデスの原理を用いた方法

3-20 をアルキメデスの原理「浮力の大きさは、その物体が排除した流体の重さに等しい」を用いて解く方法を述べる。

3-20 における遠心力を「重力」とみなして解く方法を考える。本来、アルキメデスの原理は重力のあるときに適用される原理である。したがって、この問題にそのまま適用することはできない。なぜなら、この問題では重力ではなく遠心力がかかっているからである。では、どのようにしたらアルキメデスの原理をこの問題に応用できるだろうか。「その物体が排除した流体の重さに等しい」に着目して考える。重力ではなく遠心力であるから、「重さ」が文字通りの重さではなく、遠心力による何かに置き換わるべきである。本来の意味の「重さ」について考える。「重さ」とは、「ある物体にかかっている重力をベクトルの的に足し合わせたもの」と考えることができる。いま、考えている重力はすべて同じ方向なので、ベクトル和ではなく普通の和でよい。つまり、重さ F は質量を m として

$$F = mg \quad (29)$$

と書ける。しかし、この式は「重力は場所に依らない」という近似をしている。より正確には、ある物体の密度を $\rho(\vec{r})$ として

$$F = \int_{\text{object}} \rho(\vec{r}) \hat{n} \cdot \vec{g}(\vec{r}) dV \quad (30)$$

と書く必要がある。ここで、 $\vec{g}(\vec{r})$ とはある点 $\vec{r}$ における重力加速度であり、 $\hat{n}$ は考えている「重さ」の方向の単位ベクトルである。重力が「重さ」の向きに常に一致していれば $\hat{n} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = g(\vec{r})$ となる。また、 $\int_{\text{object}} dV$ は積分範囲が物体の体積である体積積分である（体積積分（多重積分）は、大学での微分積分の授業で必ず習うのでここでは説明をはぶきます。こういう積分があるということだけ覚えておいてください。変数が三つになっただけで普通の積分とほとんど変わりません。）。これをふまえれば、「物体が排除した流体の重さ」とは、流体の密度を $\rho'(\vec{r})$ として

$$F' = \int_{\text{object}} \rho'(\vec{r}) \hat{n} \cdot \vec{g}(\vec{r}) dV \quad (31)$$

と書けることがわかる。

では、遠心力の場合を考えてみる。重力の場合からの類推として、「重さ」とは「ある物体にかかっている遠心力をベクトルの的に足し合わせたもの」と考えることができる。また、重力の場合とは異なり、「遠心力は場所に依らない」という近似はなりたたない。なぜならば、角速度 ω の等速円運動の際の遠心力 $f(\vec{r})$ は距離 r に比例して大きくなり

$$f(\vec{r}) \hat{r} = \rho(\vec{r}) r \omega^2 \hat{r} \quad (32)$$

と書けるからである。ここで、 $\hat{r}$ は動径外側方向の単位ベクトルである（ x, y のかわりに $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ として位置を r, θ で表した座標を極座標といいます。）よって、式 (30) を参考にすれば、「重さ」は

$$F = \int_{\text{object}} \rho(\vec{r}) r \omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV \quad (33)$$

と書けることがわかる。したがって、「物体が排除した流体の重さ」は流体の密度を $\rho'(\vec{r})$ として

$$F' = \int_{\text{object}} \rho'(\vec{r}) r \omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV \quad (34)$$

と書ける。

いま、物体の重さも水の重さも位置に拠らないので、 $\rho(\vec{r}) = \rho$ 、 $\rho'(\vec{r}) = \rho'$ と書くことができ、「浮力」 F' と「重さ」 F の差は

$$F' - F = \int_{\text{object}} \rho'(\vec{r}) r \omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV - \int_{\text{object}} \rho(\vec{r}) r \omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV = (\rho' - \rho) \int_{\text{object}} r \omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV \quad (35)$$

となり、 $r > 0$ 、 $\omega > 0$ より体積積分も正であるから、結局力の方向は ρ と ρ' の大小関係で決まっているということがわかる。問いにおいては、 $\rho' > \rho$ なので、 $F' - F > 0$ である。よって、物体は「浮力」がかかっている方向、つまり、動径方向内向きへと行くことがわかる。

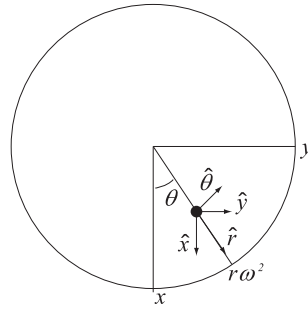


図 5: 極座標表示

3-20 解答例 2 浮力の具体的な計算方法

ここではアルキメデスの原理を使うなんて天下りの嫌だ、という人のために、実際に浮力を計算する。

質量密度 ρ の液体中に仮想的な柱状領域を考える。(断面積 S 、高さ h) 上面における圧力を P 、下面における圧力を P' とおくと、柱状領域の下面に垂直方向にかかる力は

- 遠心力: $\rho \int_{\text{object}} r\omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV$ 下向き
- 上面: PS 下向き
- 下面: $P'S$ 上向き

つりあい条件から

$$-\rho \int_{\text{object}} r\omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV - PS + P'S = 0 \quad (36)$$

$$P' = P + \frac{\rho}{S} \int_{\text{object}} r\omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV \quad (37)$$

となる。

この液体に密度 ρ' の物体を入れたら、物体にかかる力は

- 遠心力: $\rho' \int_{\text{object}} r\omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV$ 下向き
- 上面: PS 下向き
- 下面: $P'S$ 上向き

よって、物体に上向きに

$$-\rho' \int_{\text{object}} r\omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV - PS + P'S = (\rho - \rho') \int_{\text{object}} r\omega^2 \hat{r} \cdot \hat{n} dV \quad (38)$$

の力がかかる。積分の中を計算するには、図 (6) のような方向の遠心力の、下面に垂直な成分を足し合わせることが必要であるが、ここでは計算ははぶく。

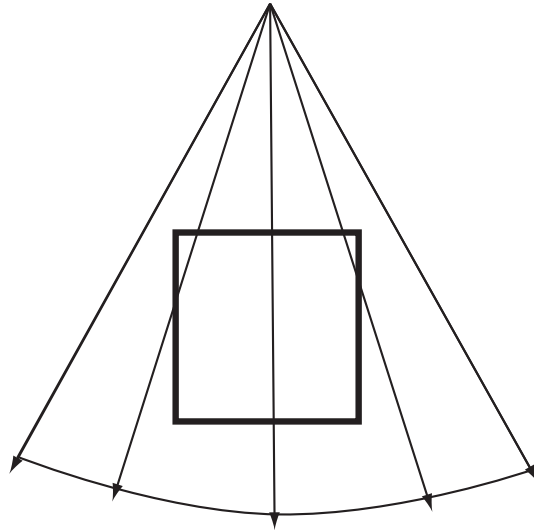


図 6: 重力と異なり、遠心力は各点各点で向きが異なっている