2016 年度夏学期　熱力学（担当：加藤雄介）
補足資料 2016.07.22 (文責：福井)

$x_i (i = 1, 2, \cdots, n) > 0$ のとき

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \tag{1}$$

を示したい．これは、対数をとると

$$\ln\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) \geq \frac{1}{n}\ln\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln x_i \tag{2}$$

である．以下これを示す．それには対数関数が凹関数であることを用いる．凹関数とは $0 \leq \rho \leq 1$ を満たす全ての実数 ρ と定義域内のすべての x_1, x_2 について

$$f(\rho x_1 + (1-\rho)x_2) \geq \rho f(x_1) + (1-\rho) f(x_2) \tag{3}$$

を満たす関数 $f(x)$ のことである．これは $f(x)$ に 2 階微分が存在すれば

$$f''(x) \leq 0 \tag{4}$$

であることと同値である (自分で $f(x)$ の接線を考えて $f'(x)$ が非増加関数であることを確かめると良い). $\ln x$ $(x > 0)$ の 2 階微分は $0 > -1/x^2$ なので対数関数は凹関数である． $f(x)$ が凹関数のとき式 (2) を一般化した

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\rho_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^{n}\rho_i f(x_i) \tag{5}$$

が成立することを示す．ここで, $\rho_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ は $\rho_i \geq 0$(for all i), $\sum_{i=1}^{n}\rho_i = 1$ を満たす実数である．
証明) 数学的帰納法により示す．$n = 2$ のとき, 不等式は凹関数の定義そのものである．
$n = k$ のとき, 不等式が成立すると仮定すると, $n = k + 1$ のときも

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k+1}\rho_i f(x_i) &= \sum_{i=1}^{k}\rho_i f(x_i) + \rho_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&= R\sum_{i=1}^{k}\frac{\rho_i}{R} f(x_i) + \rho_{k+1} f(x_{k+1}) \quad \left(R \equiv \sum_{i=1}^{k}\rho_i \text{とした}\right) \\
&\leq R f\left(\sum_{i=1}^{k}\frac{\rho_i}{R} x_i\right) + \rho_{k+1} f(x_{k+1}) \\
&\leq f\left(\sum_{i=1}^{k+1}\rho_i x_i\right)
\end{aligned} \tag{6}$$

となる．2 行目から 3 行目へは $\sum_{i=1}^{k}\rho_i/R = 1$ となることと帰納法の過程を用いて, 3 行目から最終行へは $R + \rho_{k+1} = \sum_{i=1}^{k}\rho_i + \rho_{k+1} = 1$ であることを用いていた. (証明終)
上の不等式で $\rho_i = 1/n$, $f(x) = \ln x$ とすれば式 (2) が成立することが分かる．
ちなみに, 上で示した不等式 (5) は Jensen の不等式と呼ばれる．