

量子力学 III 量子力学 GII 演習問題 3 (担当: 加藤雄介) 2018.12.04

以下の問いに答えよ。

1. スピン 1/2 を持つフェルミオン系におけるスピン密度

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{s}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

の x, y, z 成分それぞれを場の演算子 $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$ を用いて表せ。

- 2.

$$\hat{\mathbf{S}} = \int d\mathbf{r} \hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) \quad (1)$$

の各成分の第二量子化表示 (場の演算子表示でも、生成消滅演算子表示でも良い) を求め、交換関係が、

$$[\hat{S}^\mu, \hat{S}^\nu] = i\hbar \sum_{\lambda} \epsilon_{\mu\nu\lambda} \hat{S}^\lambda \quad (2)$$

となることを示せ (確認せよ)。

3. $|\text{vac}\rangle$ を真空の状態ベクトルとする。スピン 1/2 のフェルミオンの 2 粒子状態を表す状態ベクトル

$$\left(\hat{a}_{\mathbf{k}_1, \uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2, \downarrow}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}_1, \downarrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2, \uparrow}^\dagger \right) |\text{vac}\rangle \quad (3)$$

に対応する波動関数 $\Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2)$ を求めよ。その状態が合成スピン角運動量の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

- 4.

$$\frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \sum_{s=\uparrow, \downarrow} \sum_{s'=\uparrow, \downarrow} \frac{U_0}{q^2 + \kappa^2} \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q}, s'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}', s'} \hat{a}_{\mathbf{k}, s} \quad (4)$$

はどのような物理量を表すか。