

量子力学3 量子力学 GII, 演習問題 (1) 第二量子化 (担当: 加藤雄介)
解答例 2014.11.12

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。

問題 I - 1 「第二量子化 基礎ベクトルの規格直交性」

$$\langle y_1, y_2, \dots, y_M | x_1, x_2, \dots, x_N \rangle = \frac{\delta_{M,N}}{N!} \sum_P \zeta^P \delta(y_1, x_{p(1)}) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) \quad (1)$$

を示せ。

解答例:

$P = (p(1), \dots, p(N)) \in S_N$ の偶奇性は次のように判定することもできる。 $1 \leq j < k \leq N$ のうち $p(j) > p(k)$ を満たす (j, k) の組 (これを以下では反転対と呼ぶ) の数

$$\sharp[1 \leq j < k \leq N, \text{s.t. } p(j) > p(k)] \quad (2)$$

が偶数のとき P は偶置換、奇数のときは奇置換となる (上の式において s.t. は such that の略)。たとえば $N = 2$ のとき、偶置換 (12) において $\sharp = 0$ 、奇置換 (21) において $\sharp = 1$ であり、 $N = 3$ のときの偶置換とそれに対する反転対の数を書き出すと

$$(123) \quad \sharp = 0$$

$$(231) \quad \sharp = 2$$

$$(312) \quad \sharp = 2$$

となり、奇置換とそれに対する反転対の数は

$$(132) \quad \sharp = 1$$

$$(213) \quad \sharp = 1$$

$$(321) \quad \sharp = 3$$

となる。

与えられた式 (1) を $M = N$ の場合に限定して考え、

$$\langle y_1, y_2, \dots, y_N | x_1, x_2, \dots, x_N \rangle = \frac{1}{N!} \sum_P \zeta^{\sharp[1 \leq j < k \leq N, \text{s.t. } p(j) > p(k)]} \delta(y_1, x_{p(1)}) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) \quad (3)$$

と書き直して、帰納法で示す。(3) の左辺は

$$\frac{1}{N!} \langle 0 | \hat{\psi}(y_N) \cdots \hat{\psi}(y_1) \hat{\psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\psi}^\dagger(x_N) | 0 \rangle \quad (4)$$

となる。 $\hat{\psi}(y_1)$ を $\hat{\psi}^\dagger$ との交換子をとりつつ、右に移動させていくと

$$\frac{1}{N!} \sum_{\ell=1}^N \zeta^{\ell-1} \delta(y_1, x_\ell) \langle 0 | \hat{\psi}(y_N) \cdots \hat{\psi}(y_2) \hat{\psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\psi}^\dagger(x_{\ell-1}) \hat{\psi}^\dagger(x_{\ell+1}) \cdots \hat{\psi}^\dagger(x_N) | 0 \rangle \quad (5)$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^N \zeta^{\ell-1} \delta(y_1, x_\ell) \langle y_2, \dots, y_N | x_1, \dots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \dots, x_N \rangle \quad (6)$$

となる。\$N - 1\$ の場合に (3) が成り立つとすると、(6) は \$y_2, \dots, y_N\$ が \$x_1, \dots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, x_N\$ の並べ替えのときのみゼロでないことがわかる。このとき \$P \in S_N\$ のうち、\$p(1) = \ell\$ を満たすものを用いて

$$\begin{aligned} & \langle y_2, \dots, y_N | x_1, \dots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \dots, x_N \rangle & (7) \\ & = \frac{1}{(N-1)!} \sum_{P \in S_N} \delta_{p(1), \ell} \zeta^{\#\{2 \leq j < k \leq N, \text{s.t. } p(j) > p(k)\}} \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) & (8) \end{aligned}$$

と表される。ここで \$\sum_{P \in S_N}\$ において \$P\$ の和は、\$S_N\$ 全体にわたって取っているが、\$\delta_{p(1), \ell}\$ の因子によって和に制限を与えている。(6) と (8) より

$$\begin{aligned} (3) & = \frac{1}{N!} \sum_{\ell=1}^N \sum_{P \in S_N} \delta_{p(1), \ell} \zeta^{\ell-1} \zeta^{\#\{2 \leq j < k \leq N, \text{s.t. } p(j) > p(k)\}} \delta(y_1, x_\ell) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) & (9) \\ & = \frac{1}{N!} \sum_{\ell=1}^N \sum_{P \in S_N} \delta_{p(1), \ell} \zeta^{p(1)-1} \zeta^{\#\{2 \leq j < k \leq N, \text{s.t. } p(j) > p(k)\}} \delta(y_1, x_{p(1)}) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) & (10) \end{aligned}$$

を得る。さらに

$$p(1) - 1 + \#\{2 \leq j < k \leq N, \text{s.t. } p(j) > p(k)\} \tag{11}$$

$$= \#\{1 < k \leq N, \text{s.t. } p(1) > p(k)\} + \#\{2 \leq j < k \leq N, \text{s.t. } p(j) > p(k)\} \tag{12}$$

$$= \#\{1 \leq j < k \leq N, \text{s.t. } p(j) > p(k)\} \tag{13}$$

より、(10) の波線部は \$\zeta^P\$ と書ける。さらに

$$\sum_{\ell=1}^N \sum_{P \in S_N} \delta_{p(1), \ell} = \sum_{P \in S_N} \tag{14}$$

を用いれば

$$(3) \text{ の左辺} = (11) = \frac{1}{N!} \sum_{P \in S_N} \zeta^P \delta(y_1, x_{p(1)}) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) = (3) \text{ の右辺} \tag{15}$$

となる。

問題 I - 2 「第二量子化 場の演算子の \$|\Psi_\nu\rangle\$ への作用」

$$\hat{\psi}(x) |x_1, \dots, x_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \zeta^{j-1} \delta(x, x_j) |x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N\rangle \tag{16}$$

が成り立つとすると

$$\hat{\psi}(x)|x_1, \dots, x_{N+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \hat{\psi}(x) \hat{\psi}^\dagger(x_1) |x_2, \dots, x_{N+1}\rangle \quad (17)$$

$$= \frac{(\delta(x, x_1) + \zeta \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}(x))}{\sqrt{N+1}} |x_2, \dots, x_{N+1}\rangle \quad (18)$$

$$= \frac{\delta(x, x_1)}{\sqrt{N+1}} |x_2, \dots, x_{N+1}\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{N+1}} \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}(x) |x_2, \dots, x_{N+1}\rangle \quad (19)$$

$$= \frac{\delta(x, x_1)}{\sqrt{N+1}} |x_2, \dots, x_{N+1}\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{N+1}} \hat{\psi}^\dagger(x_1) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=2}^{N+1} \zeta^{j-2} \delta(x, x_j) |x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{N+1}\rangle$$

$$= \frac{\delta(x, x_1)}{\sqrt{N+1}} |x_2, \dots, x_{N+1}\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{N+1}} \hat{\psi}^\dagger(x_1) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=2}^{N+1} \zeta^{j-2} \delta(x, x_j) |x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{N+1}\rangle$$

$$= \frac{\delta(x, x_1)}{\sqrt{N+1}} |x_2, \dots, x_{N+1}\rangle + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{j=2}^{N+1} \zeta^{j-1} \delta(x, x_j) \frac{\hat{\psi}^\dagger(x_1)}{\sqrt{N}} |x_2, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{N+1}\rangle \quad (20)$$

$$= \frac{\delta(x, x_1)}{\sqrt{N+1}} |x_2, \dots, x_{N+1}\rangle + \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{j=2}^{N+1} \zeta^{j-1} \delta(x, x_j) |x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{N+1}\rangle \quad (21)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{j=1}^{N+1} \zeta^{j-1} \delta(x, x_j) |x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_{N+1}\rangle \quad (22)$$

が成り立つ。 $N = 1$ のとき (16) が成り立つ (容易に示せる) ことを認めると (16) は数学的帰納法で示されたことになる。これを用いて、

$$\hat{\psi}(x_1) |\Psi_\nu\rangle = \sqrt{N} \int dy_2 \cdots \int dy_N \Psi_\nu(x_1, y_2, \dots, y_N) |y_2, \dots, y_N\rangle \quad (23)$$

は

$$\hat{\psi}(x) |\Psi_\nu\rangle \quad (24)$$

$$= \int dy_1 \cdots \int dy_N \Psi_\nu(y_1, y_2, \dots, y_N) \hat{\psi}(x) |y_1, \dots, y_N\rangle \quad (25)$$

$$= \int dy_1 \cdots \int dy_N \Psi_\nu(y_1, y_2, \dots, y_N) \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \zeta^{j-1} \delta(x, y_j) |y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N\rangle \quad (26)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int dy_1 \cdots \int dy_N \zeta^{j-1} \Psi_\nu(y_1, \dots, y_{j-1}, x, y_{j+1}, \dots, y_N) |y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N\rangle \quad (27)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int dy_1 \cdots \int dy_{j-1} \int dy_{j+1} \int dy_N \Psi_\nu(x, y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N) |y_1, \dots, y_{j-1}, y_{j+1}, \dots, y_N\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \int dy_2 \cdots \int dy_N \Psi_\nu(x, y_2, \dots, y_N) |y_2, \dots, y_N\rangle \quad \text{dummy variables の取替え} \quad (28)$$

$$= \sqrt{N} \int dy_2 \cdots \int dy_N \Psi_\nu(x, y_2, \dots, y_N) |y_2, \dots, y_N\rangle \quad (29)$$

のように示される。

問題 I - 3 「第二量子化 $|\Psi_\nu\rangle$ の完全性」

$$\sum_{\nu} \Psi_{\nu}(x_1, \dots, x_N) \Psi_{\nu}^*(x'_1, \dots, x'_N) = \frac{1}{N!} \sum_{P \in S_N} \zeta^P \delta(x'_1, x_{p(1)}) \cdots \delta(x'_N, x_{p(N)})$$

の右辺は

$$\langle x_1, \dots, x_N | x'_1, \dots, x'_N \rangle \quad (30)$$

とかける。左辺は

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \langle x_1, \dots, x_N | \Psi \rangle$$

$$\Psi^*(x_1, \dots, x_N) = \langle \Psi | x'_1, \dots, x'_N \rangle$$

を用いると

$$\sum_{\nu} \langle x_1, \dots, x_N | \Psi_{\nu} \rangle \langle \Psi_{\nu} | x'_1, \dots, x'_N \rangle \quad (31)$$

$$= \langle x_1, \dots, x_N | \left(\sum_{\nu} |\Psi_{\nu}\rangle \langle \Psi_{\nu}| \right) | x'_1, \dots, x'_N \rangle \quad (32)$$

とかける。よって、

$$\langle x_1, \dots, x_N | \left(\sum_{\nu} |\Psi_{\nu}\rangle \langle \Psi_{\nu}| \right) | x'_1, \dots, x'_N \rangle = \langle x_1, \dots, x_N | x'_1, \dots, x'_N \rangle \quad (33)$$

すなわち、

$$\sum_{\nu} |\Psi_{\nu}\rangle \langle \Psi_{\nu}| = 1$$

となる。

問題 I - 4 「第二量子化 場の演算子を用いた一粒子演算子の表式」

$$\langle \Psi | \int dx_1 \hat{\psi}^{\dagger}(x_1) \hat{\delta}^{(1)}(x_1) \hat{\psi}(x_1) | \Psi \rangle \quad (34)$$

$$= N \int dx_1 \int dx'_2 \cdots \int dx'_N \int dx_2 \cdots \int dx_N \quad (35)$$

$$\Psi^*(x_1, x'_2, \dots, x'_N) \hat{\delta}^{(1)}(x_1) \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \langle x'_2, \dots, x'_N | x_2, \dots, x_N \rangle \quad (36)$$

$$= N \sum_{P \in S_{N-1}} \frac{\zeta^P}{(N-1)!} \int dx_1 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, x_{p(2)}, \dots, x_{p(N)}) \hat{\delta}^{(1)}(x_1) \Psi(x_1, \dots, x_N) \quad (37)$$

$$= N \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, x_2, \dots, x_N) \hat{\delta}^{(1)}(x_1) \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (38)$$

である。一方、

$$\int dx_1 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, x_2, \dots, x_N) \left(\sum_{j=1}^N \hat{\sigma}^{(1)}(x_j) \right) \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (39)$$

$$= \sum_{j=1}^N \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, \dots, x_N) \hat{\sigma}^{(1)}(x_j) \Psi(x_1, \dots, x_N) \quad (40)$$

$$= \sum_{j=1}^N \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \zeta^{j-1} \Psi^*(x_j, x_1, \dots, x_N) \hat{\sigma}^{(1)}(x_j) \zeta^{j-1} \Psi(x_j, x_1, \dots, x_N) \quad (41)$$

$$= N \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, \dots, x_N) \hat{\sigma}^{(1)}(x_1) \Psi(x_1, \dots, x_N) \quad (42)$$

よって (34)=(39) である。

問題 I - 5 「第二量子化 場の演算子を用いた二粒子演算子の表式」

$$\langle \Psi | \frac{1}{2} \int dx_1 \int dx_2 \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) \hat{\sigma}^{(2)}(x_1, x_2) \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) | \Psi \rangle \quad (43)$$

$$= \frac{N(N-1)}{2} \int dx_1 \int dx_2 \int dx'_3 \cdots \int dx'_N \int dx_3 \cdots \int dx_N \quad (44)$$

$$\Psi^*(x_1, x_2, x'_3 \cdots, x'_N) \hat{\sigma}^{(2)}(x_1, x_2) \Psi(x_1, x_2, x_3 \cdots, x_N) \langle x'_3, \dots, x'_N | x_3, \dots, x_N \rangle \quad (45)$$

$$= \frac{N(N-1)}{2} \sum_{P \in S_N} \frac{\delta_{p(1),1} \delta_{p(2),2} \zeta^P}{(N-2)!} \int dx_1 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, x_2, x_{p(3)} \cdots, x_{p(N)}) \hat{\sigma}^{(2)}(x_1, x_2) \Psi(x_1, \dots, x_N) \quad (46)$$

$$= \frac{N(N-1)}{2} \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, x_2, \dots, x_N) \hat{\sigma}^{(2)}(x_1, x_2) \Psi(x_1, \dots, x_N) \quad (46)$$

一方

$$\int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, x_2, \dots, x_N) \left(\sum_{j < k} \hat{\sigma}^{(2)}(x_j, x_k) \right) \Psi(x_1, \dots, x_N) \quad (47)$$

$$= \sum_{j < k} \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, \dots, x_N) \hat{\sigma}^{(2)}(x_j, x_k) \Psi(x_1, \dots, x_N) \quad (48)$$

$$= \sum_{j < k} \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \zeta^{j-1+k-2} \Psi^*(x_j, x_k, x_1, \dots, x_N) \hat{\sigma}^{(2)}(x_j, x_k) \zeta^{j-1+k-2} \Psi(x_j, x_k, x_1, \dots, x_N) \quad (49)$$

$$= \sum_{j < k} \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, x_2, \dots, x_N) \hat{\sigma}^{(2)}(x_1, x_2) \Psi(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (49)$$

$$= \frac{N(N-1)}{2} \int dx_1 \int dx_2 \cdots \int dx_N \Psi^*(x_1, x_2, \dots, x_N) \hat{\sigma}^{(2)}(x_1, x_2) \Psi(x_1, \dots, x_N) \quad (50)$$

よって (43)=(47) である。

問題 I - 6 「第二量子化 粒子数演算子」

略 (ヒントに従って解けばよい。)

問題 I - 7 「第二量子化 基礎ベクトルの意味」

以下に示す計算により

$$\hat{\rho}(x)|x_1, \dots, x_N\rangle = \sum_{j=1}^N \delta(x - x_j)|x_1, \dots, x_N\rangle \quad (51)$$

となる。これから、基礎ベクトル（基底をなすベクトル=basis vector） $|x_1, \dots, x_N\rangle$ は x_1, \dots, x_N に粒子が一つずついる状態を表すことがわかる。

解法 1

$$[\hat{\rho}(x), \hat{\psi}^\dagger(x_j)] = \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(x_j) - \hat{\psi}^\dagger(x_j)\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x) \quad (52)$$

$$= \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(x_j) - \zeta\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}^\dagger(x_j)\hat{\psi}(x) \quad (53)$$

$$= \hat{\psi}^\dagger(x)[\hat{\psi}(x), \hat{\psi}^\dagger(x_j)]_\zeta \quad (54)$$

$$= \delta(x, x_j)\hat{\psi}^\dagger(x) \quad (55)$$

を用いると

$$\begin{aligned} & \hat{\rho}(x)\hat{\psi}^\dagger(x_1)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle \\ = & \underbrace{[\hat{\rho}(x), \hat{\psi}^\dagger(x_1)]}_{\delta(x, x_1)}\hat{\psi}^\dagger(x_2)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle + \hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{\rho}(x)\hat{\psi}^\dagger(x_2)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle \\ = & \delta(x, x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_2)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle + \hat{\psi}^\dagger(x_1)\underbrace{[\hat{\rho}(x), \hat{\psi}^\dagger(x_2)]}_{\delta(x, x_2)}\hat{\psi}^\dagger(x_3)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle \\ & + \hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_2)\hat{\rho}(x)\hat{\psi}^\dagger(x_3)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle \\ & \dots\dots\dots \\ = & \sum_{j=1}^N \delta(x, x_j)\hat{\psi}^\dagger(x_1)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle \end{aligned}$$

となる。これから (51) が導かれる。

解法 2 I-2 より (16) が成り立つので

$$\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)|x_1, \dots, x_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^N \zeta^{j-1} \delta(x, x_j) \hat{\psi}^\dagger(x)|x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N\rangle \quad (56)$$

となる。ここで $\delta(x, x_j)\hat{\psi}^\dagger(x) = \delta(x, x_j)\hat{\psi}^\dagger(x_j)$ と

$$\frac{\zeta^{j-1}}{\sqrt{N}} \hat{\psi}^\dagger(x_j)|x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_N\rangle = |x_1, \dots, x_N\rangle \quad (57)$$

を用いると (56) から (51) が導かれる。