# 量子力学3 量子力学GII, 演習問題(3) 電磁場の量子化、経路積分
# （担当：加藤雄介）　2014.1.27

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。

II の目的

- クーロンゲージでの電磁場の量子化について理解すること。
- コヒーレント状態の基本的な性質を理解すること。
- 実スカラー場の量子化について理解すること。

**問題 II ー 01「電磁場の量子化　電場と磁場の交換関係」**

電場と磁場の交換関係

$$[\hat{E}_x(\mathbf{r}), \hat{B}_y(\mathbf{r}')] \tag{1}$$

を計算せよ。

**問題 II ー 02「場の量子化　実数スカラー場」**

実数場 $\phi(\mathbf{r}, t)$ がある。この場の古典的運動方程式は波動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \phi(\mathbf{r}, t) \tag{2}$$

で与えられ、運動エネルギー、弾性エネルギーがそれぞれ

$$K = \frac{m}{2} \int d\mathbf{r} \left( \frac{\partial \phi(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right)^2, \quad V = \frac{mv^2}{2} \int d\mathbf{r} \left( \nabla \phi(\mathbf{r}, t) \right)^2, \tag{3}$$

で与えられる。電磁場の量子化と同様の方法で

$$[\hat{c}_{\mathbf{k}}, \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}'}] = \delta_{\mathbf{k},\mathbf{k}'}, \quad [\hat{c}_{\mathbf{k}}, \hat{c}_{\mathbf{k}'}] = 0 \tag{4}$$

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar \omega_k}{2} \left( \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}} \hat{c}_{\mathbf{k}} + \hat{c}_{\mathbf{k}} \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}} \right), \quad \omega_k = vk \tag{5}$$

$$\phi(x, t) \to \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_k \Omega}} \left( \hat{c}_{\mathbf{k}}(t) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \hat{c}^\dagger_{\mathbf{k}}(t) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \right) \tag{6}$$

と量子化できることを確認せよ。

III の目的

- 一粒子系の経路積分の基本的な枠組みを理解すること。
- 古典極限との対応を理解すること。
- シュレーディンガー方程式との対応を理解すること。
- 自由粒子、調和振動子などの基本的な例を扱えるようになること。

**問題 III ー 01「経路積分　古典的作用」**

一次元自由粒子の古典的作用は

$$S_{\mathrm{cl,fr}} = \frac{m}{2}\frac{(x_b - x_a)^2}{t_b - t_a} \tag{7}$$

で与えられることを示せ。

**問題 III ー 02「経路積分　古典的作用」**

一次元調和振動子の古典的作用は

$$S_{\mathrm{cl,ho}} = \frac{m\omega}{2\sin\omega T}\left(\left(x_a^2 + x_b^2\right)\cos\omega T - 2x_a x_b\right) \tag{8}$$

で与えられることを示せ $(T = t_b - t_a)$。

**問題 III ー 03「経路積分　調和振動子の核」**

調和振動子の核 (Kernel) が

$$K = F(T)\exp\left(\frac{\mathrm{i}S_{\mathrm{cl,ho}}}{\hbar}\right) \tag{9}$$

で与えられることを示せ $(T = t_b - t_a)$。関数 $F(T)$ の具体形

$$F(T) = \left(\frac{m\omega}{2\pi\mathrm{i}\hbar\sin\omega T}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{10}$$

は求めなくてよい。