

## 1 Stern-Gerlach の実験

### 1.1 磁気双極子が不均一磁場から受ける力

磁気双極子が不均一磁場から受ける力も 電子双極子が不均一電場から受ける力 からの類推で考える。一様電場では合力ゼロ (ただし力のモーメント=トルクは受ける) (図1左図)。一方、不均一電場下では合力も力のモーメントも受ける (図1右図)。不均一電場から電気双極子が力を受ける様子は蛇口から流れ出る水流に帯電体 (擦った下敷きなど) を近づけて確かめることができる (図2)。

地点  $\mathbf{r}_+$  に電荷  $q$  の点電荷、地点  $\mathbf{r}_-$  に電荷  $-q$  の点電荷が存在するとき、この二つの電荷が電場から受ける合力は、

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r}_+) - q\mathbf{E}(\mathbf{r}_-) \quad (1)$$

$$= q\mathbf{E}\left(\mathbf{R} + \frac{\mathbf{d}}{2}\right) - q\mathbf{E}\left(\mathbf{R} - \frac{\mathbf{d}}{2}\right) \quad (2)$$

ここで  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  は地点  $\mathbf{r}$  における電場を表す。最後の等号では重心座標と相対座標

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{r}_+ + \mathbf{r}_-}{2} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} = (x, y, z), \quad \mathbf{d} = \mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- = d_x\hat{x} + d_y\hat{y} + d_z\hat{z} = (d_x, d_y, d_z) \quad (3)$$

を導入した。 $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$  はそれぞれ  $x, y, z$  方向の単位ベクトルであり、後では  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$  とも書く (ハット^は演算子の記号として用いたため)。

$\mathbf{d}$  の成分  $d_x, d_y, d_z$  はどれも微小量であり、**3変数関数の Taylor 展開**<sup>1</sup> を用いて上式を  $d_x, d_y, d_z$  のべき展開で表すと

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{d} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{R}) + (\mathbf{d} \text{ について 2 次程度の微小量}) \quad (4)$$

と表せる。ここでここで  $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  は偏微分記号を成分とするベクトル (ナブラという) であり、

$$\mathbf{d} \cdot \nabla = d_x \frac{\partial}{\partial x} + d_y \frac{\partial}{\partial y} + d_z \frac{\partial}{\partial z}$$

である。電気双極子モーメント  $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$  を用いると

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{R}) + (\mathbf{d} \text{ について 2 次程度の微小量}) \quad (5)$$

となる。この式を

$$\mathbf{F} \simeq (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{R}) \quad (6)$$

と表す。

例題

$$(\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) = \left(\frac{\partial(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})}{\partial x}, \frac{\partial(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})}{\partial y}, \frac{\partial(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E})}{\partial z}\right) \quad (7)$$

<sup>1</sup>注: 本文赤字箇所は2年生にとっては既習で、1年生にとっては未習かつ本講義で説明していない用語を表す。

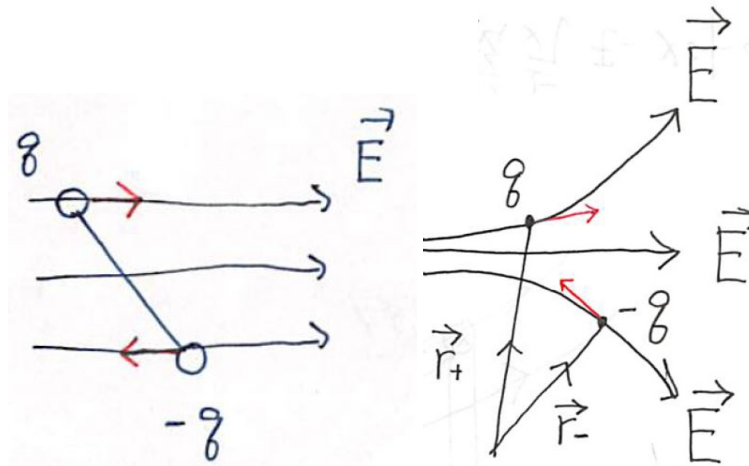


図 1: (a) 一様電場中の電気双極子. (b) 不均一電場中の電気双極子.

を示せ。ただし静電場であるとし  $\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{R}) = 0$  が成り立つとせよ。

略解

ベクトル解析の公式より

$$\nabla(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R})) - (\mathbf{p} \cdot \nabla)\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \mathbf{p} \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{R}))$$

であることを用いる。

同様にして磁気双極子も一様磁場からは力を受けないが、不均一磁場からは力を受ける (図 3 参照)。その力はここまでの議論で、 $\mathbf{p}, \mathbf{E}(\mathbf{R})$  をそれぞれ磁気モーメント  $\boldsymbol{\mu}$ , 磁場  $\mathbf{B}(\mathbf{R})$  に読み替えて、

$$\mathbf{F} \simeq \nabla(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{R})) \tag{8}$$

となる。

## 1.2 磁気モーメントの量子化

古典物理学からは磁気モーメントの向きはバラバラでどの向きにも向いていそうであるから、銀原子の曲がり方も連続的に分布しているだろうと予想される (図 2 で電場勾配下で水流が広がるのと同じようにふるまうと予想される)。実際には銀原子のビームは二つの方向に分離する。これは磁気モーメントが 2 つの値に量子化されていることを示唆している (磁気モーメントの量子化)。

## 2 Stern-Gerlach 型の思考実験

<sup>2</sup>この節では Stern-Gerlach 実験を拡張し、思考実験を行う。その結果に基づき、量子論における状態を「内積」や「射影」が定義できる抽象的なベクトルとして記述する方針を採る。

---

<sup>2</sup>J.J. 桜井 現代の量子力学に基づく

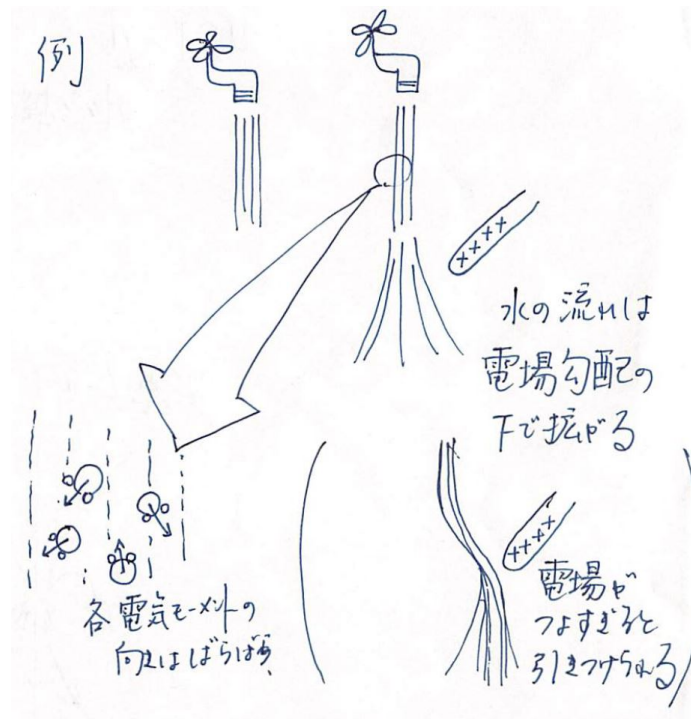


図 2: 電場勾配から電気双極子が力を受ける例

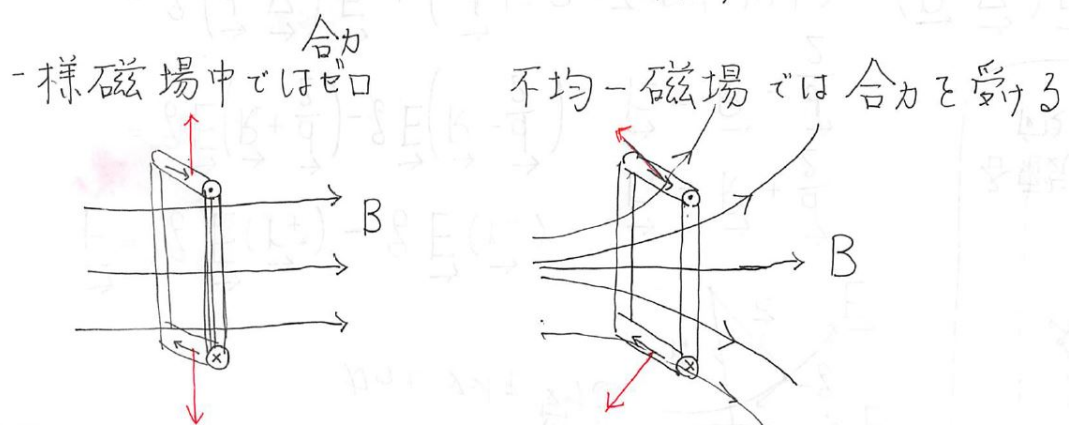


図 3: ループ電流が磁場から受ける力

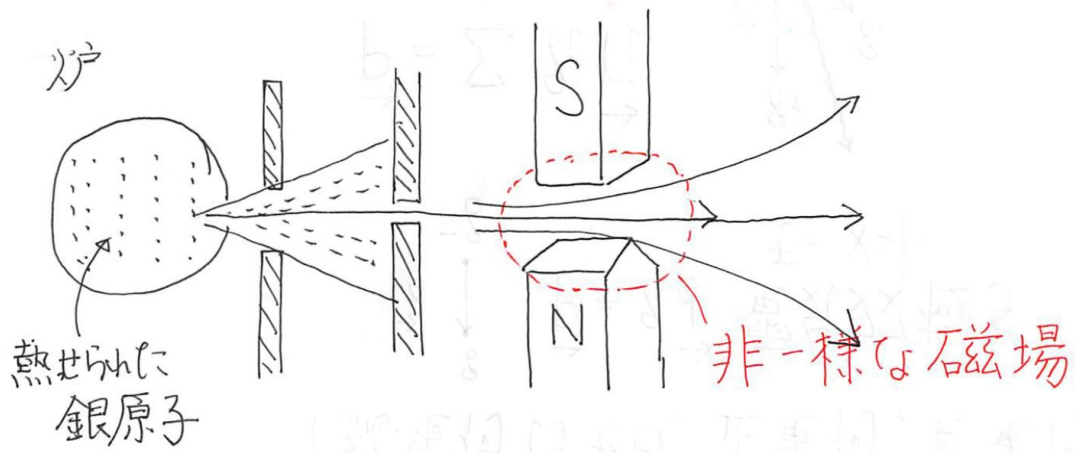


図 4: Stern-Gerlach 実験のセットアップ

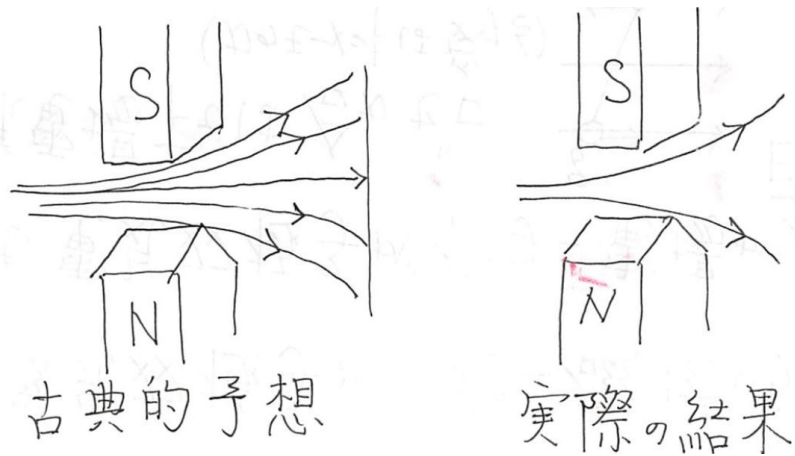


図 5: Stern-Gerlach 実験の結果

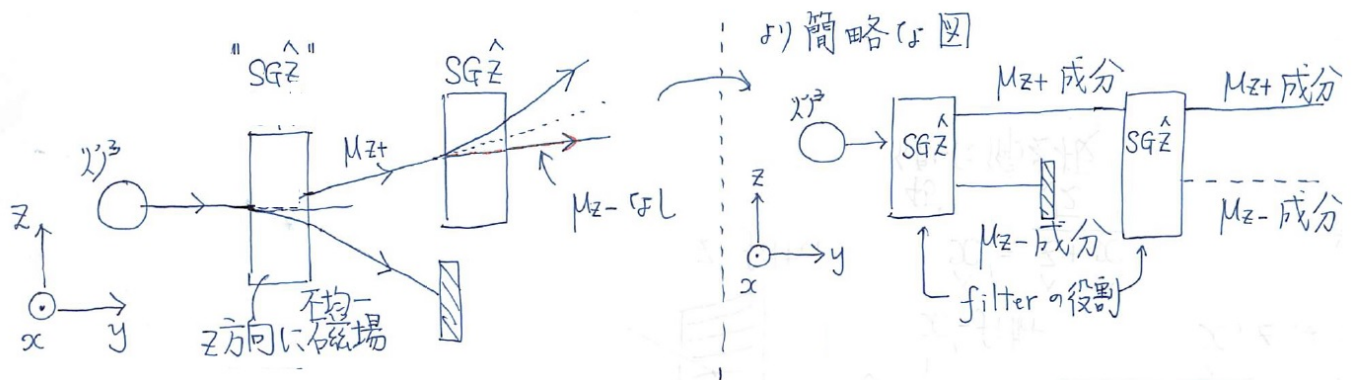


図 6: Stern-Gerlach 実験の簡略図

## 2.1 模式図と用語の準備

$z$  軸方向に磁場勾配を掛ける磁極の配置を "SG $\hat{z}$ -filter" を呼び、SG $\hat{z}$ -filter を通過した後分離したビームのうち、 $+z$  方向に曲がったビームを  $\mu_{z+}$  成分 ( $\mu_{z+}$  ビーム) とよび、 $-z$  方向に曲がったビームを  $\mu_{z-}$  成分 ( $\mu_{z-}$  ビーム) とよぶ。

同様に  $x$  軸方向に磁場勾配を掛ける磁極の配置を SG $\hat{x}$ -filter と呼び、SG $\hat{x}$ -filter を通過した後分離したビームのうち、 $+x$  方向に曲がったビームを  $\mu_{x+}$  成分 ( $\mu_{x+}$  ビーム) とよび、 $-x$  方向に曲がったビームを  $\mu_{x-}$  成分 ( $\mu_{x-}$  ビーム) とよぶ。図 6 左図は SG $\hat{z}$ -filter を通過した後の  $\mu_{z+}$  ビームをもう一度 SG $\hat{z}$ -filter を通過させる実験を模式的に示したものである (斜線で示したのはビームのストッパー (吸収壁) である)。2 回目の "SG $\hat{z}$ " を通過した後のビームはすべて  $+z$  方向に進むので、 $\mu_{z-}$  成分は含まれないことになる。つまり SG $\hat{z}$ -filter は入射ビームを  $\mu_{z+}$  成分と  $\mu_{z-}$  成分に分離するフィルター (filter) の役割を果たすことがわかる (それを見越して SG $\hat{z}$ -filter, SG $\hat{x}$ -filter と名付けた)。右の図はその状況をより簡略に表した模式図であり、以下同様の模式図を用いる。

## 2.2 思考実験とその結果

思考実験として、図 7 の 2 行目に描いたように SG $\hat{z}$ -filter を通過した後の  $\mu_{z+}$  ビームを今度は "SG $\hat{x}$ " を通過させたところ、通過後のビームは  $+x$  方向と  $-x$  方向の 2 方向のビームに分離した。"SG $\hat{x}$ " に入射するビームの強度を 100% とすると、 $\mu_{x+}$  ビームと  $\mu_{x-}$  ビームの強度は等しく 50% であった。さらにこのうち  $\mu_{x+}$  ビームをもう一度 SG $\hat{z}$  に入射したところ、通過後のビームは  $+z$  方向と  $-z$  方向の 2 方向のビームに分離し、それぞれのビーム強度は 25% であった。このことは  $\mu_{z+}$  ビームを SG $\hat{x}$  に入射させると  $\mu_{z-}$  成分が復活することを意味している。この現象に対する理論モデルを立てる際の参考として、古典電磁波における類似の現象を見ていくことにする。

## 2.3 古典電磁波

電磁波は横波であり、その偏光方向は波の進行方向に直交した 2 次元平面上にある。偏光フィルター (偏光板) は特定の偏光成分だけを通すものである。ここでは  $x$  成分 ( $z$  成分) だけを通す偏光フィルターを  $x$ -filter ( $z$ -filter) と呼ぶ。電磁波の進行方向を  $y$  軸にとると、電場ベクトル  $\mathbf{E}$  は  $y$  軸とは直交する  $\mathbf{E} \perp \hat{y}$ 。図 8 のよう

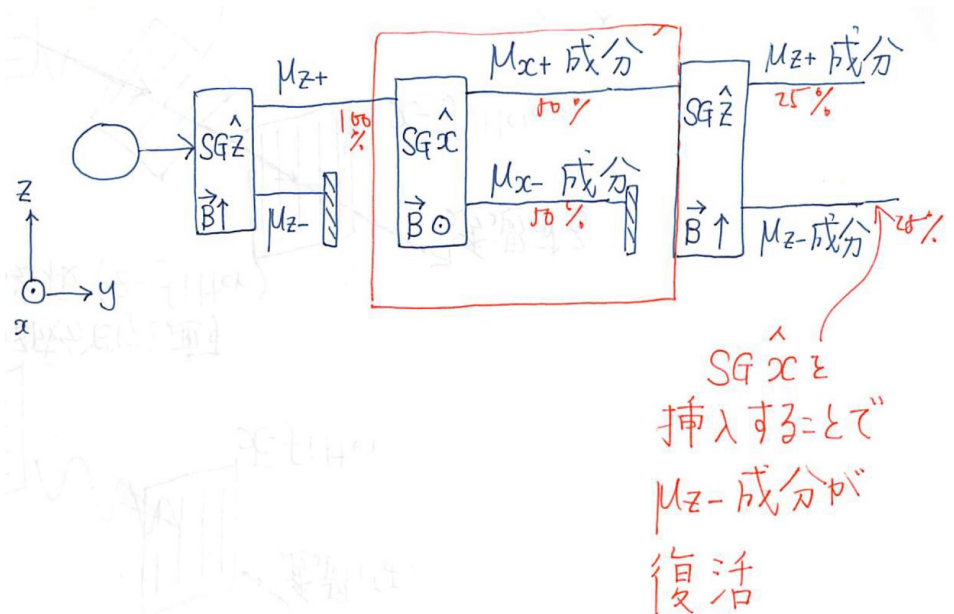


図 7: Stern-Gerlach 型思考実験の図

に  $z$ -filter に電場  $\mathbf{E}_{in}$  が入射したとき透過後の電場は

$$\mathbf{E}_{out} = (\hat{z} \cdot \mathbf{E}_{in})\hat{z} \quad (9)$$

となる。この式は  $z$ -filter が  $\mathbf{E}_{in}$  のうち  $z$  方向への射影成分のみを透過させることと示している (図 9)。従って  $z$ -filter を透過した電場のうち  $x$ -filter を透過する成分はゼロである。一方でいったん  $\hat{x}' = (\hat{x} + \hat{z})/\sqrt{2}$  方向の偏光フィルターを透過させるとその電場は  $x$  成分も持っているので、 $x$ -filter を透過する成分が復活する (図 10)。この現象と SG 型の思考実験の結果の間に類似性が認められる。これをヒントに SG 型の思考実験の結果に対する理論モデルを述べる。

## 2.4 Stern-Gerlach 型の思考実験に対する理論モデル

改めて図 11 に思考実験の模式図を載せる。ポイントは量子系の状態を抽象的なベクトルとみなすことにある。ここでいうベクトルとは

- 和が定義されている。
- 定数倍が定義されている。
- 内積が定義されているもの

という意味で用いている。前節で用いたのは“ベクトルの射影”のみであるから、これで十分なはずである。仮定 1 量子状態のうち、

- $\mu_{z+}$  ビームの状態を表すベクトルを  $|\mu_{z+}\rangle$  (古典電磁波の  $\hat{z}$  に対応)
- $\mu_{z-}$  ビームの状態を表すベクトルを  $|\mu_{z-}\rangle$  (古典電磁波の  $\hat{x}$  に対応)

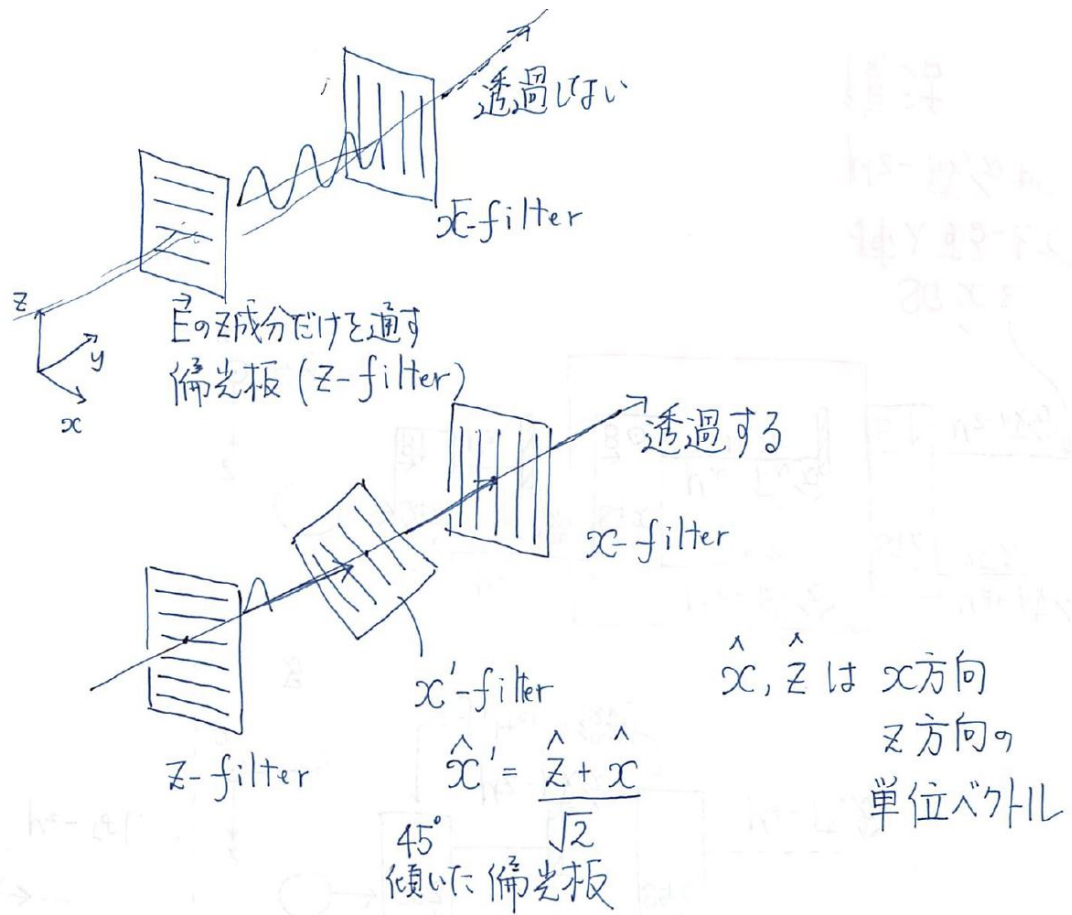


図 8: 古典電磁波と偏光フィルター

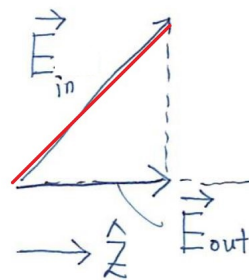


図 9: 偏光フィルターの働き

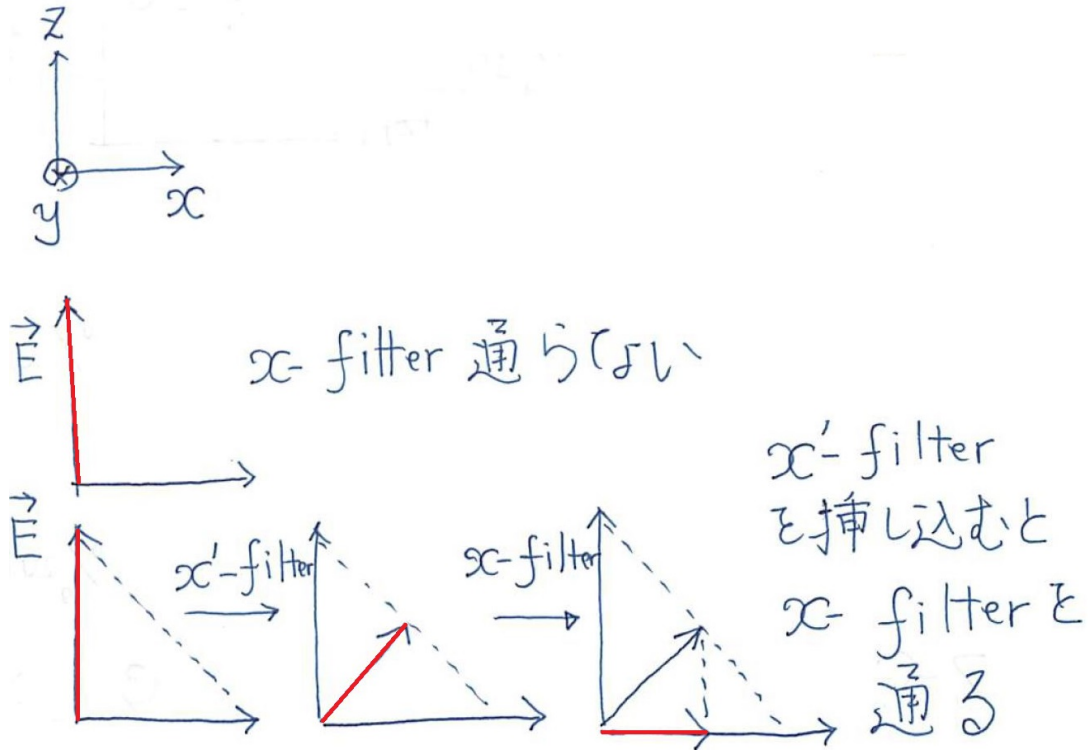


図 10: 図 8 における偏光フィルターの働き

- $\mu_{x+}$  ビームの状態を表すベクトルを  $|\mu_{x+}\rangle$  (古典電磁波の  $\hat{x}$  に対応)

とする。ベクトル  $|A\rangle, |B\rangle$  の内積を  $\langle A, B \rangle$  と書き、

仮定 2 関係式

- $\langle \mu_{z+}, \mu_{z+} \rangle = 1$
- $\langle \mu_{z-}, \mu_{z-} \rangle = 1$
- $\langle \mu_{z+}, \mu_{z-} \rangle = 0$
- $|\mu_{x+}\rangle = \frac{|\mu_{z+}\rangle + |\mu_{z-}\rangle}{\sqrt{2}}$

を仮定する。仮定するとは書いたがこれらの 4 つの関係式は上記の古典電磁場との対応関係と

- $\hat{z} \cdot \hat{z} = 1$
- $\hat{x} \cdot \hat{x} = 1$
- $\hat{z} \cdot \hat{x} = 0$
- $\hat{x}' = \frac{|\hat{z} + \hat{x}}{\sqrt{2}}$

から自然に得られるものである。

仮定 3 量子状態  $|\text{in}\rangle$  が SG $\hat{z}$ -filter を透過したあとの  $z+$  方向へ進むビームの状態  $|\text{out}\rangle$  は

$$|\text{out}\rangle = \langle \mu_{z+}, \text{in} \rangle |\mu_{z+}\rangle \quad (10)$$



で与えられる。量子状態  $|\text{in}\rangle$  が  $\text{SG}\hat{z}$ -filter を透過したあとの  $z-$  方向へ進むビームの状態  $|\text{out}'\rangle$  は

$$|\text{out}'\rangle = \langle \mu_{z-}, \text{in} \rangle |\mu_{z-}\rangle \quad (11)$$

で与えられる。

仮定 4 入射ビーム強度と透過後のビーム強度の比はそれぞれに対応するベクトル  $|\text{in}\rangle, |\text{out}\rangle$  を用いて

$$\frac{\langle \text{out}, \text{out} \rangle}{\langle \text{in}, \text{in} \rangle} \quad (12)$$

で与えられる。

ここまでの理論モデルの設定である。これを思考実験 (図 11 の 2 行目の実験) にあてはめる。

**SG $\hat{x}$ -filter を透過する事象について**

SG $\hat{x}$ -filter への入射ビームに対応するベクトルは  $|\text{in}\rangle = |\mu_{z+}\rangle$  である。これが SG $\hat{x}$ -filter を透過した後の状態は

$$|\text{out}\rangle = \langle \mu_{x+}, \text{in} \rangle |\mu_{x+}\rangle \quad (13)$$

となる。右辺の内積の部分は

$$\langle \mu_{x+}, \text{in} \rangle = \langle \mu_{x+}, \mu_{z+} \rangle = \frac{\overbrace{\langle \mu_{z+}, \mu_{z+} \rangle}^1 + \overbrace{\langle \mu_{z-}, \mu_{z+} \rangle}^0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (14)$$

なので、

$$|\text{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mu_{x+}\rangle \quad (15)$$

となる。これより

- $\langle \text{in}, \text{in} \rangle = 1$  これをビーム強度 100% とすれば
- $\langle \text{out}, \text{out} \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$  よりビーム強度は 50% となる。

その後 **SG $\hat{z}$ -filter を透過する事象について**

この事象の入射状態  $|\text{in}'\rangle = |\text{out}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\mu_{x+}\rangle$  は

$$|\text{in}'\rangle = \frac{|\mu_{z+}\rangle + |\mu_{z-}\rangle}{2} \quad (16)$$

と表される。よって、これを SG $\hat{z}$ -filter に通したら

- $z+$  方向に進むビームの状態は  $|\text{out}'\rangle = \langle \mu_{z+}, \text{in}' \rangle |\mu_{z+}\rangle = \frac{1}{2} |\mu_{z+}\rangle$  で与えられ、
- $z-$  方向に進むビームの状態は  $|\text{out}''\rangle = \langle \mu_{z-}, \text{in}' \rangle |\mu_{z-}\rangle = \frac{1}{2} |\mu_{z-}\rangle$  で与えられる。

よって

- $\langle \text{in}', \text{in}' \rangle = \frac{1}{2}$  これをビーム強度 50% としたので
- $\langle \text{out}', \text{out}' \rangle = \frac{1}{4}$  よりビーム強度は 25% となり
- $\langle \text{out}'', \text{out}'' \rangle = \frac{1}{4}$  よりビーム強度は 25% となる。

このようにしてこの理論モデルによって今考えている思考実験の結果を説明することができた。ポイントは量子系の状態を「内積」や「射影」が定義されている抽象的なベクトルで表す点にある。次節では抽象的なベクトルの集合 = **線形空間** について述べ、量子力学の定式化の準備とする。

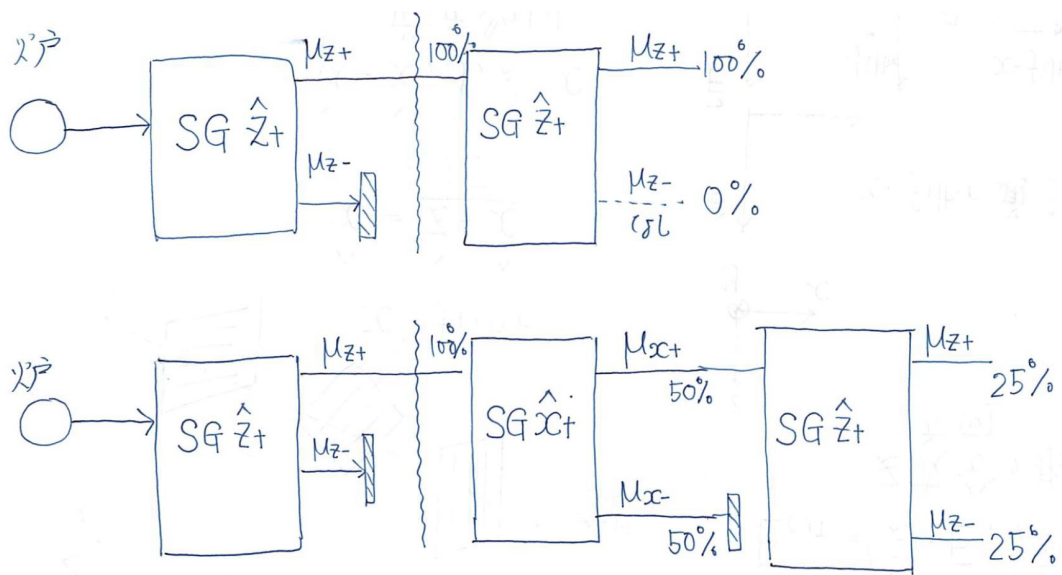


図 11: Stern-Gerlach 型思考実験の模式図 再掲