多体系の理論, 演習問題 (I)
電磁応答

加藤雄介

2018 年 11 月 10 日

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。

問題 I-01 自由電子系の電磁応答　自由電子系の基底状態における電磁応答

$$\langle \hat{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{q}) \rangle = -\left(\frac{ne^2}{m} + Q_{\mathrm{T}}(q) \right) \boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}), \quad \boldsymbol{A}_{\mathrm{T}}(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}) - \frac{\boldsymbol{q}\,(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{q}))}{q^2} \tag{1}$$

$$Q_{\mathrm{T}}(q) = Q_{\mathrm{T}}^{(1)}(\boldsymbol{q}) + Q_{\mathrm{T}}^{(1)}(-\boldsymbol{q}) \tag{2}$$

$$Q_{\mathrm{T}}^{(1)}(\boldsymbol{q}) = \sum_{\ell} \frac{|\langle \ell | \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{P}}(-\boldsymbol{q}) | g \rangle|^2}{E_0 - E_\ell}, \quad \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}_{\mathrm{P}}(-\boldsymbol{q}) = \frac{\hbar e}{m\sqrt{\Omega}} \sum_{\boldsymbol{k}', \sigma'} \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\boldsymbol{q}} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\sigma'} \hat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma'} \tag{3}$$

において

1.
$$Q_{\mathrm{T}}(q \to 0) = -\frac{ne^2}{m} \tag{4}$$

   となることを示せ。

2. q について次の次数の項まで計算し、q が小さい極限で

$$Q_{\mathrm{T}}(q \to 0) = -\frac{ne^2}{m} + \frac{2\mu_{\mathrm{B}}^2 N(0) q^2}{3} + O\left(\left(\frac{q}{k_{\mathrm{F}}} \right)^3 \right), \quad \mu_{\mathrm{B}} = \frac{\hbar |e|}{2m}, \quad N(0) = \frac{m k_{\mathrm{F}}}{2\pi^2 \hbar^2} \tag{5}$$

   となることを示せ。自由電子系のランダウ反磁性の磁化率を量子統計力学の教科書、講義ノート、あるいは自分で計算した結果を上記結果と比較し、両者の関連を論じよ。

上記問題を次ページ以降の手順に従って示してもよい（従わなくてももちろん構わない）。

参考：導出のアウトライン

1. 自由電子の基底状態は Fermi sea である。

$$|\mathrm{g}\rangle = |\mathrm{F}\rangle = \prod_{|\boldsymbol{k}|<k_\mathrm{F}} \prod_{\sigma=\uparrow,\downarrow} \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k},\sigma} |0\rangle \tag{6}$$

2. 行列要素 $\langle \ell | \boldsymbol{\eta_q} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}_\mathrm{P}(-\boldsymbol{q}) | g \rangle$ がゼロでないのは

$$|\ell\rangle = \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\sigma} \hat{a}_{\boldsymbol{k},\sigma} |\mathrm{F}\rangle, \quad |\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}| > k_\mathrm{F}, \quad |\boldsymbol{k}| < k_\mathrm{F}, \quad \sigma = \uparrow, \downarrow \tag{7}$$

のタイプの励起状態だけである。

3. (7) のタイプの励起状態で $\sigma = \uparrow$ でも $\sigma = \downarrow$ でも行列要素は

$$\langle \ell | \boldsymbol{\eta_q} \cdot \hat{\boldsymbol{j}}_\mathrm{P}(-\boldsymbol{q}) | g \rangle = \langle \mathrm{F} | \hat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\sigma} \hat{a}_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}\sigma} \boldsymbol{\eta_q} \cdot \boldsymbol{j}_\mathrm{P}(-\boldsymbol{q}) | \mathrm{F} \rangle = \frac{\hbar e}{m\sqrt{\Omega}} (\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\eta_q}) \tag{8}$$

となる。(7) のタイプの励起状態の励起エネルギーは $\sigma = \uparrow$ でも $\sigma = \downarrow$ でも

$$E_\ell - E_0 = \xi_{\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}} - \xi_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar^2}{m} \left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{q} + \frac{q^2}{2} \right) \tag{9}$$

で与えられる。

4. $\boldsymbol{q}$ の向きを z の正の向き、$\boldsymbol{\eta_q}$ の向きを x の正の向きとしても一般性は失われない。

以上の 1-4 を用いると

$$Q_\mathrm{T}^{(1)}(\boldsymbol{q}) = -\frac{e^2}{mq\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{2k_x^2 \theta(|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}| - k_\mathrm{F}) \theta(|\boldsymbol{k}| - k_\mathrm{F})}{k_z + q/2} \tag{10}$$

となる。ここで θ はヘビサイドのステップ関数である。

5. $\boldsymbol{q}$ の向きを z の正の向き、$\boldsymbol{\eta_q}$ の向きを y の正の向きとしても一般性は失われないから、(10) は

$$Q_\mathrm{T}^{(1)}(\boldsymbol{q}) = -\frac{e^2}{mq\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{2k_y^2 \theta(|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}| - k_\mathrm{F}) \theta(|\boldsymbol{k}| - k_\mathrm{F})}{k_z + q/2} \tag{11}$$

とも書けるし

$$Q_\mathrm{T}^{(1)}(\boldsymbol{q}) = -\frac{e^2}{mq\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} \frac{k_\perp^2 \theta(|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}| - k_\mathrm{F}) \theta(|\boldsymbol{k}| - k_\mathrm{F})}{k_z + q/2}, \quad k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{12}$$

とも書ける。

6. 熱力学極限で

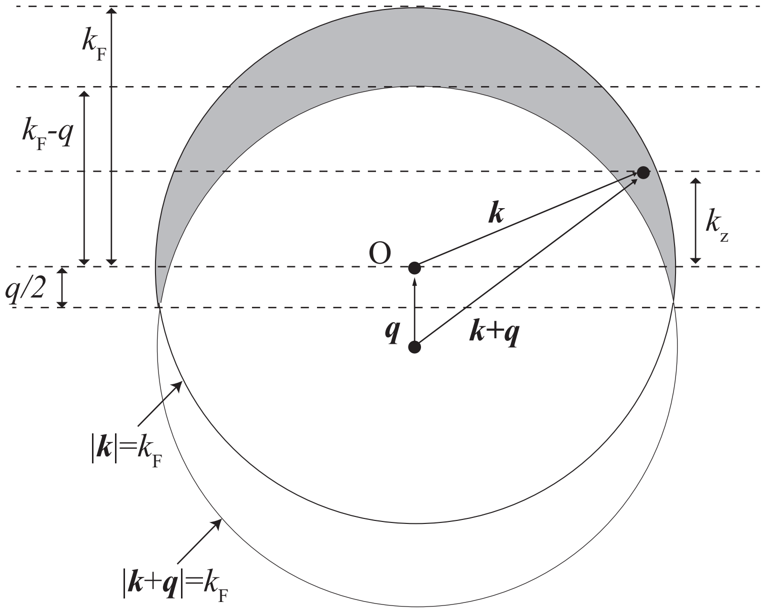
$$\frac{1}{\Omega} \sum_{\boldsymbol{k}} f(k_z, k_\perp) = \int \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} f(k_z, k_\perp) = \frac{1}{4\pi^2} \int \mathrm{d}k_z \int \mathrm{d}k_\perp k_\perp f(k_z, k_\perp) \tag{13}$$

7. 最終的には長波長極限をとるので $(0 <) q < k_\mathrm{F}$ とすると $|\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}| > k_\mathrm{F}, \quad |\boldsymbol{k}| < k_\mathrm{F},$ を満たす領域は図の斜線領域で表され、$k_z, k_\perp$ を用いて表すと

$$-\frac{q}{2} < k_z < k_\mathrm{F} - q, \text{ において } \sqrt{k_\mathrm{F}^2 - (q + k_z)^2} < k_\perp < \sqrt{k_\mathrm{F}^2 - k_z^2} \tag{14}$$

$$k_\mathrm{F} - q < k_z < k_\mathrm{F}, \text{ において } 0 < k_\perp < \sqrt{k_\mathrm{F}^2 - k_z^2} \tag{15}$$

となる。以上の 5-7 を用いると



$$Q_{\rm T}^{(1)}(\boldsymbol{q}) = -\frac{e^2 k_{\rm F}^4 (I_1(q/k_{\rm F}) + I_2(q/k_{\rm F}))}{4\pi^2 m q} \tag{16}$$

$$I_1\left(\frac{q}{k_{\rm F}}\right) = \frac{1}{k_{\rm F}^4} \int_{-q/2}^{k_{\rm F}-q} \frac{\mathrm{d}k_z}{k_z + q/2} \int_{\sqrt{k_{\rm F}^2-(q+k_z)^2}}^{\sqrt{k_{\rm F}^2-k_z^2}} \mathrm{d}k_\perp k_\perp^3 \tag{17}$$

$$I_2\left(\frac{q}{k_{\rm F}}\right) = \frac{1}{k_{\rm F}^4} \int_{k_{\rm F}-q}^{k_{\rm F}} \frac{\mathrm{d}k_z}{k_z + q/2} \int_0^{\sqrt{k_{\rm F}^2-k_z^2}} \mathrm{d}k_\perp k_\perp^3 \tag{18}$$

$$\tag{19}$$

となる.I_1, I_2 は初等積分だから積分を実行して $q/k_{\rm F}$ の関数として explicit な表式を得ることができる。それらを $q/k_{\rm F}$ について展開し、$n = k_{\rm F}^3/(3\pi^2)$ を用いると求めるべき結果に到達する。