

多体系の理論, 演習問題 (1)

電磁応答 (解答付き問題)

加藤雄介

2018 年 11 月 10 日

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。

問題 I-01 自由電子系の電磁応答 自由電子系の基底状態における電磁応答

$$\langle \hat{\mathbf{j}}(\mathbf{q}) \rangle = - \left(\frac{ne^2}{m} + Q_T(q) \right) \mathbf{A}_T(\mathbf{q}), \quad \mathbf{A}_T(\mathbf{q}) = \mathbf{A}(\mathbf{q}) - \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{q}))}{q^2} \quad (1)$$

$$Q_T(q) = Q_T^{(1)}(q) + Q_T^{(1)}(-q) \quad (2)$$

$$Q_T^{(1)}(q) = \sum_{\ell} \frac{|\langle \ell | \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{p}}(-\mathbf{q}) | g \rangle|^2}{E_0 - E_{\ell}}, \quad \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{j}}_{\mathbf{p}}(-\mathbf{q}) = \frac{\hbar e}{m\sqrt{\Omega}} \sum_{\mathbf{k}', \sigma'} \mathbf{k}' \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{q}} \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma'}^{\dagger} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma'} \quad (3)$$

において

1.

$$Q_T(q \rightarrow 0) = -\frac{ne^2}{m} \quad (4)$$

となることを示せ。

2. q について次の次数の項まで計算し、 q が小さい極限で

$$Q_T(q \rightarrow 0) = -\frac{ne^2}{m} + \frac{2\mu_B^2 N(0)q^2}{3} + O\left(\left(\frac{q}{k_F}\right)^3\right), \quad \mu_B = \frac{\hbar|e|}{2m}, \quad N(0) = \frac{mk_F}{2\pi^2\hbar^2} \quad (5)$$

となることを示せ。自由電子系のランダウ反磁性の磁化率を量子統計力学の教科書、講義ノート、あるいは自分で計算した結果を上記結果と比較し、両者の関連を論じよ。

上記問題を次ページ以降の手順に従って示してもよい（従わなくてももちろん構わない）。

参考：導出のアウトライン

1. 自由電子の基底状態は Fermi sea である。

$$|g\rangle = |F\rangle = \prod_{|\mathbf{k}| < k_F} \prod_{\sigma=\uparrow, \downarrow} \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma}^\dagger |0\rangle \quad (6)$$

2. 行列要素 $\langle \ell | \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{j}}_P(-\mathbf{q}) | g \rangle$ がゼロでないのは

$$|\ell\rangle = \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}, \sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}, \sigma} |F\rangle, \quad |\mathbf{k} + \mathbf{q}| > k_F, \quad |\mathbf{k}| < k_F, \quad \sigma = \uparrow, \downarrow \quad (7)$$

のタイプの励起状態だけである。

3. (7) のタイプの励起状態で $\sigma = \uparrow$ でも $\sigma = \downarrow$ でも行列要素は

$$\langle \ell | \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{j}}_P(-\mathbf{q}) | g \rangle = \langle F | \hat{a}_{\mathbf{k}\sigma}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q}\sigma} \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{q}} \cdot \hat{\mathbf{j}}_P(-\mathbf{q}) | F \rangle = \frac{\hbar e}{m\sqrt{\Omega}} (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\eta}_{\mathbf{q}}) \quad (8)$$

となる。(7) のタイプの励起状態の励起エネルギーは $\sigma = \uparrow$ でも $\sigma = \downarrow$ でも

$$E_\ell - E_0 = \xi_{\mathbf{k}+\mathbf{q}} - \xi_{\mathbf{k}} = \frac{\hbar^2}{m} \left(\mathbf{k} \cdot \mathbf{q} + \frac{q^2}{2} \right) \quad (9)$$

で与えられる。

4. \mathbf{q} の向きを z の正の向き、 $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{q}}$ の向きを x の正の向きとしても一般性は失われない。

以上の 1-4 を用いると

$$Q_T^{(1)}(\mathbf{q}) = -\frac{e^2}{mq\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2k_x^2 \theta(|\mathbf{k} + \mathbf{q}| - k_F) \theta(|\mathbf{k}| - k_F)}{k_z + q/2} \quad (10)$$

となる。ここで θ はヘビサイドのステップ関数である。

5. \mathbf{q} の向きを z の正の向き、 $\boldsymbol{\eta}_{\mathbf{q}}$ の向きを y の正の向きとしても一般性は失われないから、(10) は

$$Q_T^{(1)}(\mathbf{q}) = -\frac{e^2}{mq\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{2k_y^2 \theta(|\mathbf{k} + \mathbf{q}| - k_F) \theta(|\mathbf{k}| - k_F)}{k_z + q/2} \quad (11)$$

とも書けるし

$$Q_T^{(1)}(\mathbf{q}) = -\frac{e^2}{mq\Omega} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_\perp^2 \theta(|\mathbf{k} + \mathbf{q}| - k_F) \theta(|\mathbf{k}| - k_F)}{k_z + q/2}, \quad k_\perp = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \quad (12)$$

とも書ける。

6. 熱力学極限で

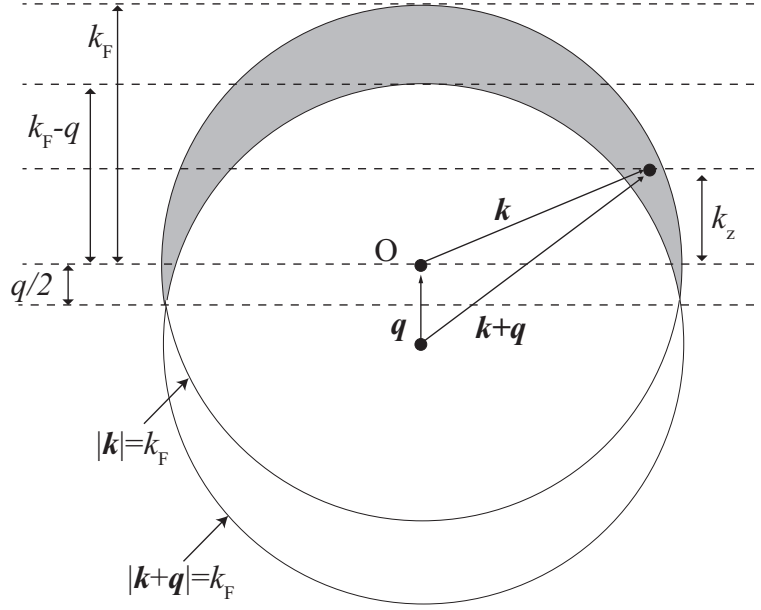
$$\frac{1}{\Omega} \sum_{\mathbf{k}} f(k_z, k_\perp) = \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} f(k_z, k_\perp) = \frac{1}{4\pi^2} \int dk_z \int dk_\perp k_\perp f(k_z, k_\perp) \quad (13)$$

7. 最終的には長波長極限をとるので $(0 <) q < k_F$ とすると $|\mathbf{k} + \mathbf{q}| > k_F$, $|\mathbf{k}| < k_F$, を満たす領域は図の斜線領域で表され、 k_z, k_\perp を用いて表すと

$$-\frac{q}{2} < k_z < k_F - q, \text{ において } \sqrt{k_F^2 - (q + k_z)^2} < k_\perp < \sqrt{k_F^2 - k_z^2} \quad (14)$$

$$k_F - q < k_z < k_F, \text{ において } 0 < k_\perp < \sqrt{k_F^2 - k_z^2} \quad (15)$$

となる。以上の 5-7 を用いると



$$Q_T^{(1)}(\mathbf{q}) = -\frac{e^2 k_F^4 (I_1(q/k_F) + I_2(q/k_F))}{4\pi^2 m q} \quad (16)$$

$$I_1\left(\frac{q}{k_F}\right) = \frac{1}{k_F^4} \int_{-q/2}^{k_F - q} \frac{dk_z}{k_z + q/2} \int_{\sqrt{k_F^2 - (q+k_z)^2}}^{\sqrt{k_F^2 - k_z^2}} dk_{\perp} k_{\perp}^3 \quad (17)$$

$$I_2\left(\frac{q}{k_F}\right) = \frac{1}{k_F^4} \int_{k_F - q}^{k_F} \frac{dk_z}{k_z + q/2} \int_0^{\sqrt{k_F^2 - k_z^2}} dk_{\perp} k_{\perp}^3 \quad (18)$$

$$(19)$$

となる. あとは I_1, I_2 を q/k_F について展開し, $n = k_F^3/(3\pi^2)$ を用いると求めるべき結果に到達する.

解答

$\bar{q} = q/k_F$ として

$$I_1(\bar{q}) = \frac{2\bar{q}}{3} - \frac{\bar{q}^3}{2} + \frac{\bar{q}^4}{6}, \quad I_2(\bar{q}) = \frac{1}{4} \left[\left(1 - \frac{\bar{q}^2}{4}\right)^2 \ln \left| \frac{1 + \bar{q}/2}{1 - \bar{q}/2} \right| - \bar{q} + \frac{7\bar{q}^3}{4} - \bar{q}^4 \right] = \frac{\bar{q}^3}{3} - \frac{\bar{q}^4}{4} + \frac{\bar{q}^5}{120} + O(\bar{q}^7) \quad (20)$$

より、

$$I_1(\bar{q}) + I_2(\bar{q}) = \frac{2\bar{q}}{3} - \frac{\bar{q}^3}{6} + O(\bar{q}^4) \quad (21)$$

$$Q_T = 2Q_T^{(1)}(\bar{q}) = -\frac{e^2 k_F^3}{2\pi^2 m \bar{q}} \left(\frac{2\bar{q}}{3} - \frac{\bar{q}^3}{6} + O(\bar{q}^4) \right) = -\frac{k_F^3}{3\pi^2} \underbrace{e^2}_n + \frac{e^2 k_F q^2}{12\pi^2 m} + O(\bar{q}^3) = -\frac{ne^2}{m} + \frac{2}{3} \underbrace{\left(\frac{\hbar e}{2m}\right)^2}_{\mu_B^2} \underbrace{\left(\frac{mk_F}{2\pi^2 \hbar^2}\right)}_{N(0)} q^2 + O(\bar{q}^3) \quad (22)$$

となる. 問題で与えられた式 (5) になる.

メモ:

$$\frac{1}{4} \left(1 - \frac{\bar{q}^2}{4}\right)^2 \ln \left| \frac{1 + \bar{q}/2}{1 - \bar{q}/2} \right| = \frac{1}{4} \left(\bar{q} - \frac{5\bar{q}^3}{12} + \frac{\bar{q}^5}{30} \right) + O(\bar{q}^7) \quad (23)$$