

2016年度S Semester 力学 A
(担当: 加藤雄介) 2016.07.20

第 08 回講義 (06/08) に関連した問題 「gradient, 力学的エネルギー保存則」

理解度確認問題

第 1 問 仕事エネルギー定理

小物体の運動エネルギーの変化は、その物体に働く合力のする仕事に等しいことを示せ。

第 2 問 万有引力 万有引力が保存力であることを示せ。

第 3 問 **gradient** gradient の定義を述べよ。その幾何学的意味を述べよ。

2016年度S Semester 力学 A
(担当：加藤雄介) 2016.07.20

第 09 回講義 (06/15) に関連した問題 「保存力場の下での質点の一次元運動、角運動量、中心力、万有引力とケプラーの法則」

理解度確認問題

第 1 問 角運動量保存則

中心力の下での一つの小物体の運動について以下の問いに答えよ。

1. 角運動量が保存することを示せ。
2. 小物体はある平面上を運動することを示せ。

第 2 問

3次元中心力の下での運動はなぜ2次元極座標で表すことができるのか。

第 3 問

平面上の運動における面積速度と、平面に垂直な角運動量成分 L の関係を述べよ。

第 4 問 等速度運動の角運動量は保存するか。

第 5 問 等加速度運動の角運動量は保存するか。

第 6 問 単振り子の角運動量は保存するか。

第 7 問

一つの小物体 (質量 m) の中心力の下での運動している。この物体が初期時刻において $\mathbf{r} = (a, 0, b)$ にあり、速度は $\mathbf{v}_0 = (v_a, v_b, 0)$ であるとする (二つのベクトルは平行でも反平行でもないとする)。このとき小物体はある平面上を運動することを示し、その平面の方程式を求めよ。

第 8 問

3次元空間中の中心力ポテンシャル $U(r)$ の下での物体 (質量 m) における角運動量の大きさを L とするとき、 r 方向の運動はあるポテンシャル $U_{\text{eff}}(r)$ の下での一次元運動

$$m \frac{d^2 r}{dt^2} = U_{\text{eff}}(r), \quad r \geq 0 \quad (1)$$

と対応付けることができる。このとき $U_{\text{eff}}(r)$ を $U(r)$, L , m , r を用いて表せ。

補足問題

第 1 問 ポテンシャル極小点まわりの微小振動 質量 m の小物体がポテンシャル $U(x)$ の下で x 軸上を運動する。

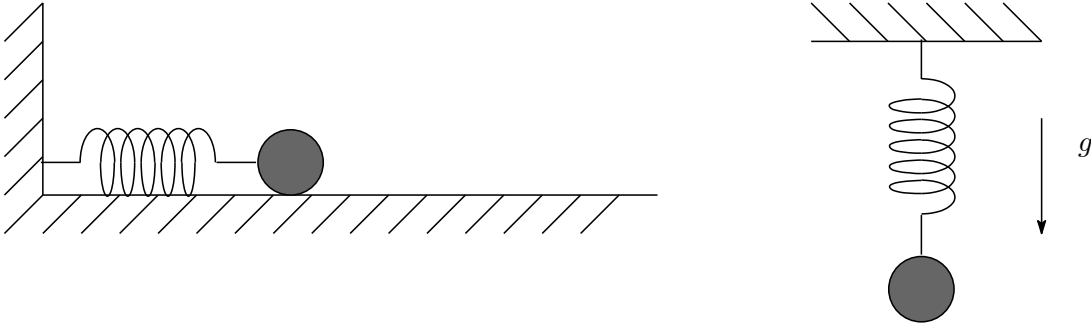
$$U(0) = 0, \quad \left. \frac{dU(x)}{dx} \right|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{d^2 U(x)}{dx^2} \right|_{x=0} > 0 \quad (2)$$

を満たすとき、 $x \sim 0$ 付近での微小振動の周期を求めよ。

第2問 非線形ばねの下での微小振動 質量 m のおもりが、バネに結び付けられている。そのバネの弾性エネルギー（ポテンシャルエネルギー） $U(x)$ は自然長からの伸び x の関数として

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} + \frac{\lambda x^4}{4}, \quad k > 0, \quad \lambda > 0$$

で与えられるとする。図1のようにまさつのない水平面をおもりが微小振動するときの周期と図2のよ



うにおもりが微小振動するときの周期ではどちらが短いか？理由とともに述べよ

第3問 一定磁場中の荷電粒子の角運動量

質量 m 、電荷 q の荷電粒子（小物体）が一定磁場（ z 方向、大きさ B ）中で次のような運動をしている。

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{v_0 \cos \omega_c t}{\omega_c}, -\frac{v_0 \sin \omega_c t}{\omega_c}, v_z t \right) \quad (3)$$

ここで $v_0 > 0$ 、 v_z 、 ω_c は時間に依存しないものとする。

1. ω_c を q 、 B 、 m を用いて表せ。
2. 角運動量 $\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ を計算し、時間とともにどのような変化するか述べよ。

第4問

2次元極座標における r と θ の関係が

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta} \quad (4)$$

と与えられるとする。 $e = 1$ が放物線、 $e > 1$ は双曲線に対応することを示せ。

第5問

$$r = \frac{\ell}{1 + e \cos \theta} \quad (5)$$

$0 < e < 1$ のとき、楕円の長半径と短半径を ℓ と e を用いて表せ。

第6問

2階線形定係数非同次方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = f(x) \quad (6)$$

の一般解（積分定数を二つ含む解）は (6) の特解 y_{ih} （積分定数を含まない解）と同次方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (7)$$

の基本解 $y_1(x)$ $y_2(x)$ の線形結合の和

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + y_{ih} \quad (8)$$

で与えられることを示せ。

2016年度S Semester 力学 A
(担当: 加藤雄介) 2016.07.22

第10回 (06/22), 11回 (06/29) 講義に関連した問題 「回転座標系」

理解度確認問題

第1問

慣性系に対して等速円運動する座標系 (回転ベクトル ω) における小物体 (質量 m) の運動は電磁場中の荷電粒子 (電荷 q) の運動と対応させることができる。どのような磁場、電場の下での運動と対応するか。

第2問

時計回りに角速度 $\omega > 0$ で等速回転しているレコード上を、中心から半径 R の円周に沿って、テントウムシが (レコードに対して) 反時計回りに速さ v で歩いている。レコードの上に立った観測者からみたときテントウムシに働く慣性力をすべて挙げ、大きさと向きを答えよ。

第3問

時計回りに角速度 $\omega > 0$ で等速回転しているレコード上を、中心から半径 R の円周に沿って、テントウムシが (レコードに対して) 中心から遠ざかる動径方向に速さ v で歩いている。レコードの上に立った観測者からみたときテントウムシに働く慣性力をすべて挙げ、大きさと向きを答えよ。

第4問

南半球の単振り子の振動面は水平面に対してどちら向きに回転するか。

第5問

南半球の上空から自由落下する小物体の落下地点は鉛直真下の地点よりどちらの方角に寄っているか。

演習問題

赤道上の地点 O の上方 h の高さから初速 0 で自由に落下する小物体 (質量 m) の運動を考える。 O を原点とし地球とともに回転する直交座標系 (右手系) を、 x 軸が経線にそって南を向き、 y 軸が赤道に沿って東に向くようにとる。 z 軸はその結果鉛直上方を向く軸となる。初期時刻 $t = 0$ のとき $x = y = 0, z = h, \dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ として以下の問いに答えよ。地球の自転 (角速度の大きさ ω) は十分ゆっくりであるとし、遠心力を無視せよ。重力加速度の大きさを g とする。

1. $x(t) = 0$ を示せ。
2. 前問の結果より、 yz 平面上の運動として考える。運動方程式が

$$m\ddot{y} = -2m\omega\dot{z}, \quad m\ddot{z} = 2m\omega\dot{y} - mg \quad (9)$$

と表されることを示せ。

3. (9) の解として等速度運動解 (\dot{y}_c, \dot{z}_c) を求めよ。
4. (9) の解は等速度運動解と等速円運動解の和

$$(\dot{y}(t), \dot{z}(t)) = (\dot{y}_c, \dot{z}_c) + A(\cos(\Omega t + \phi), \sin(\Omega t + \phi)) \quad (10)$$

の形で書けることを示し、角速度 Ω と積分定数 A, ϕ を求めよ。

5. 初期条件を満たす解が

$$y(t) = \frac{gt}{2\omega} - \frac{g \sin 2\omega t}{4\omega^2}, \quad z(t) = h + \frac{g(\cos 2\omega t - 1)}{4\omega^2} \quad (11)$$

で与えられることを示せ。

6. $\omega t \ll 1$ として (11) において、ゼロでない y, z を与える ωt の最低べきの項のみを残すと

$$y(t) \sim \frac{g\omega t^3}{3}, \quad z(t) \sim h - \frac{gt^2}{2} \quad (12)$$

で与えられることを示せ。

7. (12) から $z = 0$ (地表面) における y の値を g, ω, h を用いて表せ。

2016年度S Semester 力学 A
(担当: 加藤雄介) 2016.07.20
第12回講義 (07/06) に関連した問題 「質点系」

理解度確認問題

第1問 運動量保存則

次の命題は正しいか。

「運動量が孤立系で保存するための条件は、非保存力が仕事をしないことである。」

第2問 重心運動

孤立系の重心座標は時間とともにどのように変化するか。

第3問 複数の物体からなる孤立系における角運動量

孤立系において角運動量が保存するためには、二つの物体間に働く力がどのような性質を持つ必要があるか。

補足問題

第1問 2体問題の解

1. 運動方程式

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = k(x_2 - x_1 - \ell), \quad M \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k(x_2 - x_1 - \ell), \quad k > 0, \quad \ell > 0 \quad (13)$$

を重心座標の満たす運動方程式と相対座標の満たす運動方程式に分離せよ。

2. 前問で得られた微分方程式の一般解を求めよ。

3. また初期条件 $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = \ell$, $\dot{x}_1(0) = v_0 (> 0)$, $\dot{x}_2(0) = 0$ を満たす解 $x_1(t)$, $x_2(t)$ を求めよ。

第2問 二つの物体が動く系の力学的エネルギー保存則

運動方程式

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1 + k'(x_2 - x_1), \quad M \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_2 x_2 - k'(x_2 - x_1) \quad (14)$$

に従う系の力学的エネルギーを求めよ ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k' > 0$)。

2016年度Sセメスター力学A
(担当：加藤雄介) 2016.07.20

第13回講義(07/13)に関連した問題 「固定軸まわりの剛体運動」

理解度確認問題

第1問

固定軸まわりの剛体の回転運動における物理量、運動方程式、エネルギー保存則を、一次元的な小物体の運動のそれらと対応付けよ。

第2問

スケート選手が(ほぼ固定軸まわりで)回転しているとき腕を回転軸から離れる方向に伸ばすと回転速度は上がるか下がるか。その理由も述べよ。

補足問題

第1問

長さ l 、質量 M の細い棒の端を通り、棒の軸に垂直な固定軸まわりの回転運動に対する慣性モーメントは $Ml^2/3$ で与えられる。しかし回転固定軸が棒の軸に垂直であり、かつ棒の端から距離 $d(\leq l)$ の点を通るとき、その軸まわりの慣性モーメントは異なる値をとる。その値を求めよ。

第2問

半径 R の一様な球体(質量 M)の中心軸まわりの慣性モーメント $I = \frac{2}{5}MR^2$ を求めよ。
ヒント：球体を中心軸に垂直な円盤に分割し、それぞれの円盤の慣性モーメントを足し上げて、区分別積法で極限値を積分で表して求める。

第3問

半径 R の薄い球殻(質量 M)の中心軸まわりの慣性モーメントを求めよ。

第4問 平行軸の定理

1. 質量 M の剛体の、互いに平行な軸まわりの慣性モーメントのうち、重心を通る軸まわりの慣性モーメントが最も小さいことを示せ。
2. 重心を通る軸まわりの慣性モーメントを I_G とするとき、その軸と平行で、距離 h 離れている軸まわりの慣性モーメント I は $I = I_G + Mh^2$ で与えられることを示せ。

第5問 質量の無視できる長さ l の棒の先に半径 a 、質量 M の一様な球をつけ、棒の先端を固定回転軸として振らせる。棒の延長上に球の中心があるとする。

1. 固定軸まわりの慣性モーメントを求めよ(ヒント：平行軸の定理と第2問の結果を用いる)。
2. 微小振動の周期を求めよ。

第6問 半径 a 、質量 M の一様な球に水平軸をつけ、それを固定回転軸として振り子とする。回転軸が中心軸から距離 h にある。

1. 微小振動の周期を求めよ。
2. 周期を最小にする h を求めよ。