量子力学3 量子力学GII, 演習問題(4) 電磁場の量子化 (コヒーレント状態)
（担当：加藤雄介）　2015.10.20

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。
目的

- コヒーレント状態の基本的性質を理解すること。
- コヒーレント状態に関する基本的な計算技術を習得すること。

問題 IV − 01 「Campbell-Baker-Hausdorff の公式の導出」

$\hat{A}$, $\hat{B}$ は演算子で、それらの交換子 $[\hat{A},\hat{B}]$ は c-数であるとき、

$$\mathrm{e}^{\hat{A}+\hat{B}} = \mathrm{e}^{\hat{A}}\mathrm{e}^{\hat{B}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]} \tag{1}$$

が成り立つことを示せ。

問題 IV − 02「CBH 公式の応用」

パラメターt に依存する演算子 $\hat{A}(t)$ の交換子 $[\hat{A}(t),\hat{A}(t')]$ が c-数であるとき

1.
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\hat{A}(t)} = \left(\frac{\mathrm{d}\hat{A}(t)}{\mathrm{d}t} + \gamma_A(t)\right)\mathrm{e}^{\hat{A}(t)}, \quad \gamma_A(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}\hat{A}(t)}{\mathrm{d}t}, \hat{A}(t)\right] \tag{2}$$

   を示せ。

2.
$$\Gamma(t) = \exp\left[-\int_0^t \gamma(t')\mathrm{d}t'\right]$$

   として

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\hat{A}(t)}\Gamma(t)\right) = \frac{\mathrm{d}\hat{A}(t)}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{\hat{A}(t)}\Gamma(t)\right) \tag{3}$$

   を示せ。

3. パラメターt に依存する演算子 $\hat{B}(t)$ が $[\hat{B}(t),\hat{B}(t')]$ が c-数であるとき

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = \exp\left(\int_0^t \hat{B}(t')\mathrm{d}t' - \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{d}t' \int_0^{t'} \mathrm{d}t'' \left[\hat{B}(t'), \hat{B}(t'')\right]\right) \tag{4}$$

   が微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\hat{\mathcal{U}}(t) = \hat{B}(t)\hat{\mathcal{U}}(t) \tag{5}$$

   を満たすことを示せ。
   注:

$$\hat{B}(t) = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\mathcal{H}'_{\mathrm{I}}(t) \tag{6}$$

   と置くと講義で説明した微分方程式になる。

問題 IV － 03「調和振動子のコヒーレント状態 I」

$$\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{I}}'(t) = -\frac{\lambda\ell}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \hat{a}^{\dagger}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) \tag{7}$$

$$-\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_0^t \hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{I}}'(t')\mathrm{d}t' = \alpha(t)\hat{a}^{\dagger} - \alpha^*(t)\hat{a} \tag{8}$$

と書いたとき

$$\alpha(t) = \frac{\lambda\ell}{\sqrt{2}\hbar\omega}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} - 1\right) \tag{9}$$

を示せ。

問題 IV － 04「調和振動子のコヒーレント状態 II」

$t = 0$ から $\hat{\mathcal{H}}_{\mathrm{I}}'$ を調和振動子の基底状態 $|0\rangle$ にかけ続けた時、時刻 $t(\geq 0)$ における状態は $\alpha(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}$ のコヒーレント状態になる。複素平面上で $\alpha(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}$ を描け。また $\hat{x}$,$\hat{p}$ の時刻 t の期待値を求め、図示せよ。