2015年度Sセメスター力学A（担当：加藤雄介）　2015.05.22
レポート課題1解答例

ベクトル積の性質

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (A_yB_z - A_zB_y)\,\boldsymbol{e}_x + (A_zB_x - A_xB_z)\,\boldsymbol{e}_y + (A_xB_y - A_yB_x)\,\boldsymbol{e}_z \tag{1}$$

を踏まえて以下の関係式、性質を導く。

問題

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A} \tag{2}$$

解答

(1) で、A と B を入れ替えると負符号が出る。

問題

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = 0 \tag{3}$$

解答

(2) より $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A}$ であるから、移項の結果

$$2\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A} = 0$$

すなわち (3) を得る。

問題

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C} \tag{4}$$

解答

(1) を用いて

$$\begin{aligned}
&(4)\text{ の左辺}\\
&= A_x(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_x + A_y(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_y + A_z(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})_z\\
&= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x)\\
&= \sum_{\lambda=x,y,z}\sum_{\mu=x,y,z}\sum_{\nu=x,y,z}\epsilon_{\lambda\mu\nu}A_\epsilon B_\mu C_\nu
\end{aligned} \tag{5}$$

とまとめることができる。ここで記号

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu} = \begin{cases} 1 & (\hat{\lambda},\hat{\mu},\hat{\nu})\text{ が右手系をなす}\\ -1 & (\hat{\lambda},\hat{\mu},\hat{\nu})\text{ が左手系をなす}\\ 0 & \text{それ以外}\end{cases} \tag{6}$$

を用いた。以下和の部分を単に $\sum_{\lambda,\mu,\nu}$ を略記する。ここで

$$\epsilon_{\lambda\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda} = \epsilon_{\nu\lambda\mu}$$

であることを用いると

$$\begin{aligned}
(4)\text{ の右辺} &= C_x(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_x + C_y(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_y + C_z(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})_z\\
&= \sum_{\lambda,\mu,\nu}\epsilon_{\lambda\mu\nu}C_\epsilon A_\mu B_\nu = \sum_{\lambda,\mu,\nu}\epsilon_{\mu\nu\lambda}A_\mu B_\nu C_\lambda
\end{aligned} \tag{7}$$

最右辺の式は (5) のそれと比べて、ダミー変数の名前が異なるだけで等しい表式である。

問題

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\neq 0$ の時 (この条件を追加しました)

$$\boldsymbol{A}\perp(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}),\quad \boldsymbol{B}\perp(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) \tag{8}$$

解答

第一式だけ示す。(4) より、

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{A})\cdot\boldsymbol{B}=0 \tag{9}$$

二番目の等式では (3) を用いた。

問題

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C} \tag{10}$$

$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ は $(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ と直交するから $\boldsymbol{B}$ と $\boldsymbol{C}$ の張る平面内にある。よって

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\alpha\boldsymbol{B}+\beta\boldsymbol{C}$$

とおく。$\boldsymbol{A}$ とも直交するから、

$$\alpha\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}+\beta\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=0$$

より、

$$\alpha=\gamma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\quad\beta=-\gamma\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$$

とおける。これを用いて

$$\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\gamma\left((\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}\right)$$

と書く。両辺は $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ それぞれの成分について線形であるので、γ は $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ の成分によらない定数である。ここで $\boldsymbol{A}=\hat{x},\boldsymbol{B}=\hat{y},\boldsymbol{C}=\hat{z}$ とおき ($\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_y,\boldsymbol{C}=\boldsymbol{e}_z$)、両辺を比較すると $\gamma=1$ となり、与式が示される。

問題

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=AB|\sin\theta| \tag{11}$$

ただし $A=|\boldsymbol{A}|$, $B=|\boldsymbol{B}|$, θ は $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のなす角度。

解答

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})^2=A^2B^2\sin^2\theta \tag{12}$$

を示す。

$$\begin{aligned}
\text{左辺}=(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) &= \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}))\\
&= \boldsymbol{A}\cdot(B^2\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{B})\\
&= A^2B^2-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})^2\\
&= A^2B^2-A^2B^2\cos^2\theta\\
&= A^2B^2\sin^2\theta
\end{aligned} \tag{13}$$