2015年度Sセメスター力学A
（担当：加藤雄介）　2015.04.12

第01回講義 (04/10) に関連した問題 「微分法とベクトルを用いた運動の記述」

理解度確認問題

第1問

等速円運動では加速度の大きさは一定であることを示せ。また加速度は回転の中心を向くことを示せ。

第2問

半径 R の等速円運動の周期が R^{α} に比例するとき、向心力をもたらす力の大きさ $F(R)$ は R の何乗に比例するか。$\alpha = 3/2$ の場合はどんな状況で実現するか。

補足問題

以下、$\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B}(t)$ は時刻 t に依存するベクトルであるとする。また $r(t) := \sqrt{\boldsymbol{r}(t)^2} = \sqrt{\boldsymbol{r}(t) \cdot \boldsymbol{r}(t)}$, $v(t) := \sqrt{\boldsymbol{v}(t)^2} = \sqrt{\boldsymbol{v}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)}$ であるとする。また $\frac{\boldsymbol{r}(t)}{r(t)} = \boldsymbol{e}_r(t)$ とおく。

第1問

$$\frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{B}(t)\right) = \frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} \cdot \boldsymbol{B}(t) + \boldsymbol{A}(t) \cdot \frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt} \tag{1}$$

を導け。

第2問

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{A}(t)^2 = \frac{d}{dt}\left(\boldsymbol{A}(t) \cdot \boldsymbol{A}(t)\right) = 2\boldsymbol{A}(t) \cdot \frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt} \tag{2}$$

を導け。

第3問

$$\frac{d}{dt}r(t) = \boldsymbol{e}_r(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) \tag{3}$$

を導け。

第4問

r の関数 $f(r)$ に対して

$$\frac{d}{dt}f(r(t)) = \frac{df(r(t))}{dr(t)}\boldsymbol{e}_r(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) \tag{4}$$

を導け。

演習問題

第1問 $x(t)$ が次の関係式（微分方程式）

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) \tag{5}$$

を満たすとき、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}\left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^2+\frac{k}{2}x(t)^2\right)=0 \tag{6}$$

を示せ。

第 2 問 $\theta(t)$ が次の関係式（微分方程式）

$$m\ell\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}=-mg\sin\theta(t) \tag{7}$$

を満たすとき、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\ell^2}{2}\left(\frac{d\theta(t)}{dt}\right)^2-mg\ell\cos\theta(t)\right)=0 \tag{8}$$

を示せ。

第 3 問 $\boldsymbol{r}(t)$ が次の関係式（微分方程式）

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2}=-\frac{\alpha\boldsymbol{e}_r(t)}{r(t)^2}=-\frac{\alpha\boldsymbol{r}(t)}{r(t)^3} \tag{9}$$

を満たすとき (α は定数)、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m}{2}v(t)^2-\frac{\alpha}{r(t)}\right)=0 \tag{10}$$

を示せ。