2015 年度 A セメスター　電磁気学 B
（担当：加藤雄介）　2015.10.21

第 05 回 (10/21) に関連した問題 「面積分、立体角、ガウスの法則」

理解度確認問題

第 1 問 面積分は閉曲面に対してのみ定義されるか？

第 2 問 電荷 q の点電荷を含む領域を囲む閉曲面を S とし、その向きを点電荷のある側を裏側とするように定める。このとき電場 $\boldsymbol{E}$ の S に関する面積分の値を求めよ。

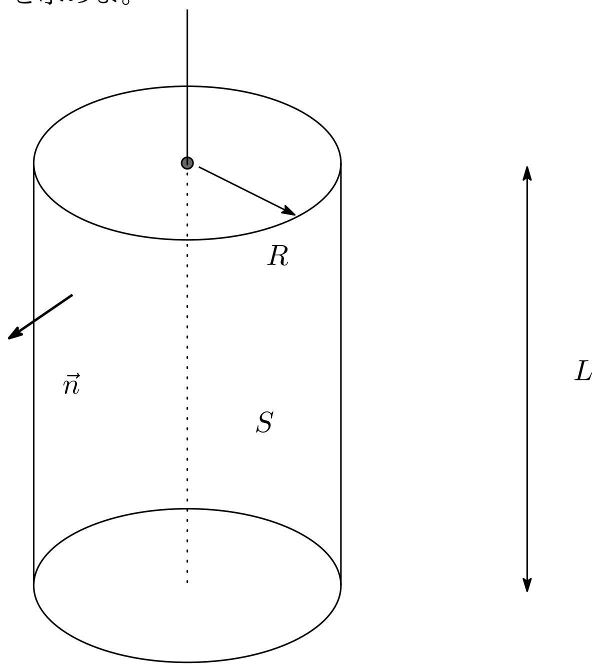
第 3 問 双極子モーメント $\boldsymbol{p}$ の電気双極子を含む領域を囲む閉曲面を S とし、その向きを点電荷のある側を裏側とするように定める。このとき電場 $\boldsymbol{E}$ の S に関する面積分の値を求めよ。

補足問題

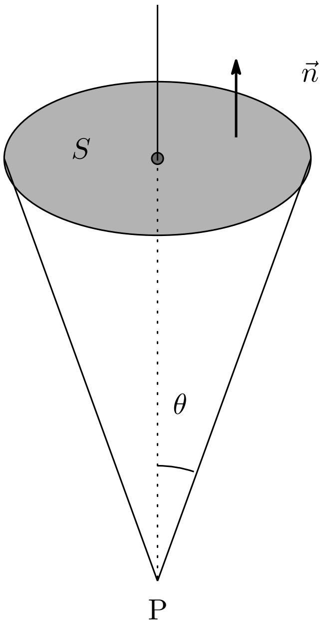
第 1 問　円筒対称なベクトル場の面積分 (数学) $\vec{\rho} = x\hat{x} + y\hat{y}$ とする。さらに $\rho = |\rho|$, $\hat{\rho} = \vec{\rho}/\rho$ とする。今、z 軸を軸とする円筒面を S とし、その法線ベクトルは外側を向いているものとする。円筒の半径は R、軸に沿っての長さは L であるとする。ベクトル場 $\vec{V}(\vec{r}) = V(\rho)\hat{\rho}$ の S 上の面積分

$$\int_S \vec{V}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

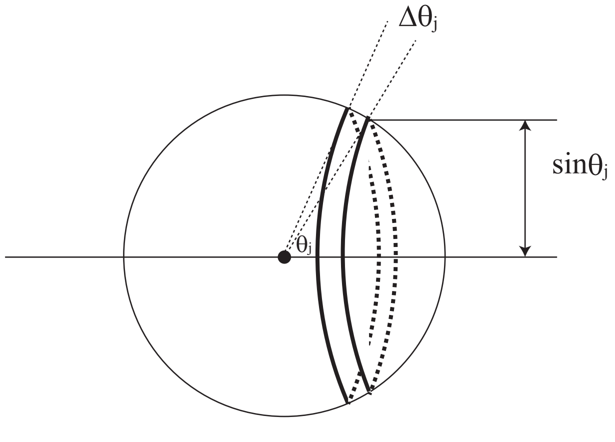
を求めよ。



第 2 問　立体角 (数学) 面 S と点 P が半頂角 θ の円錐をなすとき、P から見た S の立体角 $\Omega(S)$ は $2\pi(1-\cos\theta)$ となることを示せ。但し法線ベクトルは図で与えた向きにとるものとする。



ヒント：円錐が切り取った単位球面上の図形を図のような帯状領域（$\Delta\theta_j = \theta_{j+1} - \theta_j$ の幅をもち、短いほうのふちの長さが $2\pi \sin\theta_j$）に分割する。



第 3 問　球内に一様に分布した電荷による電場 半径 a の球内に電荷 Q が一様に分布しているとき、O（球の中心）から距離 r の地点 $\mathrm{P}(\vec{\mathrm{OP}} = \vec{r})$ における電場 $\vec{E}(\vec{r})$ をガウスの法則を用いて以下の手順に従って求めよ。

電荷分布は球対称であるから電場も球対称である。球の中心を O、電場を求める点を P、O からみた P の位置ベクトルを $\vec{r}$ とすると、

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$$

とかけるはず。$E(r)$ は $r = |\vec{r}|$ だけの関数であり、これを $r > a$ と $r < a$ の場合に分けて求める。以下では O を中心とし、半径が r である球の表面を S とし、S 上の法線ベクトルの向きを外向き (O から遠ざかる向き) にとる。

1. S 上の $\vec{E}(\vec{r})$ の面積分
$$\int_S \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1}$$
を $E(r)$ と r で表わせ。
2. S に囲まれる領域内の全電荷を、Q, r, a を用いて表わせ。
3. ガウスの法則を用いて、$E(r)$ を導き、グラフに図示せよ。

第 4 問　円柱領域内に一様に分布した電荷による電場 電荷が一様に分布した半径 R の円柱領域がある。円柱の軸方向の長さは十分長いものとする。電荷密度（単位体積当たり）を ν とする。空間の各点における電場を求めよ。