

2014 年度冬学期振動波動論 第 4 回講義 (10/27) に関連した問題
(担当: 加藤雄介) 2014.11.10

理解度確認問題

第 1 問 共鳴 次の文章は正しいか、誤っているか。

1. 変位の振幅は外力の周波数 ω が ω_0 に等しいときに最大になる。
2. 外力がする仕事率は外力の周波数 ω が ω_0 に等しいときに最大になる。
3. 変位と外力は ω が ω_0 に等しいときに同位相になる。

第 2 問 基準振動 基準振動とは何か答えよ。運動方程式の一般解との関係を述べよ。

補足問題

第 1 問 2 つの質点からなる系の振動の一般解

講義であつかった 2 質点系の振動の一般解をもとに、時刻 $t = 0$ において、おもり 1 の変位が x_{01} 、速度が \dot{x}_{01} 、おもり 2 の変位が x_{02} 、速度が \dot{x}_{02} である初期値問題の解を求めよ。

演習問題

2-1 2 つの質点からなる連成振動系 (ばね) における強制振動

2 粒子系、3 粒子系で基準振動を求めて何が面白い? とする人もいると思う。そこで連成振動系に外力を加えたときの応答を考察し、基準振動が系の応答を特徴付けることを理解してもらおう。連成振動系 (図 1) を外力で揺すったら何が起こるか?

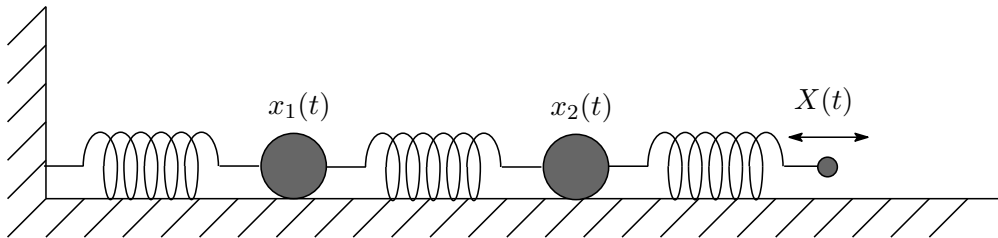


図 1: 2 つの質点からなる連成振動系 (ばね) における強制振動

1. 運動方程式を立てよ。
2. $(x_1(t), x_2(t)) = (A_1 \cos \omega t, A_2 \cos \omega t)$ とおき、 (A_1, A_2) を求めよ。
3. (A_1, A_2) の ω 依存性をグラフに描け。

2-2 二つの単振り子からなる系の振動

図 2 に示すように、単振り子を二つ直列に連結した。糸の長さはともに l である、おもりの質量はともに m である。2 本の糸の方向と鉛直下向き方向のなす角を θ_1, θ_2 とする。ふたつのおもりの大きさは十分小さいものとする。重力加速度の大きさを g とする。以下の設問では角度 θ_1, θ_2 は十分小さく、

$$\sin \theta_i \sim \theta_i, \quad \cos \theta_i \sim 1$$

と近似してよいものとし、ふたつのおもりの座標はそれぞれ

$$\mathbf{r}_1 = \begin{pmatrix} l \sin \theta_1 \\ -l \cos \theta_1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} l\theta_1 \\ -l \end{pmatrix}, \quad \mathbf{r}_2 = \begin{pmatrix} l \sin \theta_1 + l \sin \theta_2 \\ -l \cos \theta_1 - l \cos \theta_2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} l\theta_1 + l\theta_2 \\ -2l \end{pmatrix}$$

とおけるものとする（ここで座標の原点は天井とつながっている糸の支点（白丸の部分）にとった）。

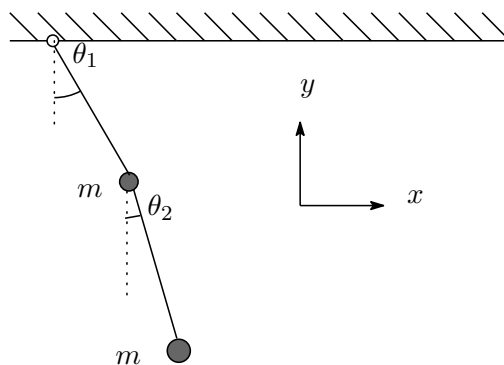


図 2:

1. 二つのおもりに対する運動方程式を立てよ。ただし天井とつながっている糸の張力の大きさを T_1 、二つの質点を結ぶ糸の張力の大きさを T_2 としてよい。
2. T_1, T_2 を m, g, l のうち必要なものを用いて表せ。
3. ふたつの基準振動に対する固有振動数を求めよ。
4. それぞれの固有振動数に対する基準振動解 $(\theta_1(t), \theta_2(t))$ を求めよ。

図 2 に示すように、天井とつながっている糸の支点（白丸の部分）を横方向に

$$X(t) = a \cos \omega t$$

で揺らす。

5. A_1, A_2 を時間に依存しないとして、

$$(\theta_1(t), \theta_2(t)) = (A_1 \cos \omega t, A_2 \cos \omega t)$$

とおき、運動方程式に代入し (A_1, A_2) を求めよ。

6. (A_1, A_2) の ω 依存性を図示せよ。またその特徴について論じよ。