2014 年度冬学期振動波動論 第二回講義 (10/15) に関連した問題
（担当：加藤雄介） 2014.10.19

理解度確認問題

第 1 問　一自由度の振動系でエネルギー散逸を考える理由 一自由度の振動系でエネルギー散逸を考える意義を 3 つほど挙げよ。

第 2 問　2 階線形同次方程式の一般解 以下の微分方程式の、基本解と一般解を求めよ.

$$3\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+7\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0 \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0 \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=0 \tag{3}$$

第 3 問　粘性流体中の単振り子；標準形への落とし込み 質量 m、半径 a の球形物体が長さ ℓ のひもを介して天井からつるされている。まわりの空気の粘性係数を η とし、物体が速さに比例する粘性抵抗力を受けるとき、微小振動に対する運動方程式を書け。この場合、講義で扱った「標準形」

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+2\kappa\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0 \tag{4}$$

における κ に相当するものは何か。与えられた物理量を用いて表せ。

第 4 問　標準形の運動の性質の分類 講義で扱った 2 階定係数線形微分方程式（同次形）に関する定理から、(4) で表される系の運動の性質は κ と ω_0 の大小関係によってどのように変わると推測されるか。

補足問題 (補足説明を問題形式で掲載)

第 1 問　2 階定係数線形同次方程式の一般解の"証明"(特性方程式が重根を持たない場合) 微分方程式

$$L[y]=0,\quad L[y]\equiv\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+a\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+by \tag{5}$$

の一般解が、$x=0$ まわりの級数

$$y=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{n!}x^n \tag{6}$$

で表せるとして、二つの基本解の線形結合で表せることを以下の手順で示せ。ただし $a^2-4b\neq 0$ であるものとし、特性方程式の解（特性根）を α,β とする。

1. c_n が 3 項漸化式

$$c_{n+2}+ac_{n+1}+bc_n=0,\quad n=0,1,2\cdots \tag{7}$$

を満たすことを示せ。

2. (7) の一般解が

$$c_n = d_{\mathrm{I}}\alpha^n + d_{\mathrm{II}}\beta^n \tag{8}$$

で表せることを示せ。

3. (8) を (6) に代入して

$$y = d_{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{\alpha x} + d_{\mathrm{II}}\mathrm{e}^{\beta x} \tag{9}$$

と書けることを示せ。

第 2 問　2 階定係数線形同次方程式の一般解の”証明”(特性方程式が重根を持つ場合) 前問で、$a^2 - 4b = 0$ が成り立つとしても、同様な議論で、一般解を求めることができる。

1. 三項漸化式 (7) の一般解を求めよ。
2. その解を (6) に代入して (5) に対する一般解を求めよ。