力学 B 演習問題 I 解答・解説

2010 年 5 月 31 日

1　解答

以下の問題で、重力加速度 g は $9.8m/s^2$ とする。SI 単位系の基本単位 (m,kg,s) だけを用いた。

I-1,2

ボールの質量を m とする。ピッチャーが球を投げる点を座標原点にとると、x,y 方向の運動方程式はそれぞれ

$$m\ddot{x} = 0 \tag{1}$$
$$m\ddot{y} = -mg \tag{2}$$

となる。x 方向に初速 $v(= 155km/h \simeq 43.0m/s)$ でボールを投げる初期条件のもとで、この式を積分すると

$$x = vt \tag{3}$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 \tag{4}$$

が得られる。したがって、マウンドから 18.44m 離れたホームプレートには

$$t_1 = \frac{18.44}{v} = \frac{18.44}{43.0} = 0.428 \simeq 0.43s \tag{5}$$

より、**0.43 秒後に到達する (I-1)**。
また、このとき、ボールは

$$y = -\frac{1}{2}gt_1^2 = -\frac{1}{2}9.8 \times (0.43)^2 = 0.906 \simeq 0.91m \tag{6}$$

より、**0.91m 落ちている** (I-2)。

I-3

摩擦を考慮しない場合、地上での運動は、放物線を描くことを考慮すると、「同じ高さの点」は放物線の中心から見て、対称的な位置にあることが分かる[*1]。したがって、本問では、50m 先の同じ高さにある標的を打ち抜くためには 25m の地点で、放物線の中心、つまり高さが最大になるような、角度 θ でライフルを撃てばよい。そこで、ライフルの初速$\boldsymbol{v}$を

$$\boldsymbol{v} = v(\cos\theta, \sin\theta) \tag{7}$$

とおこう ($v = 400m/s$)。このとき、運動方程式を解くと

$$x = v\cos\theta t \tag{8}$$
$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + v\sin\theta t \tag{9}$$
$$\tag{10}$$

となる。x=25m となる時間は $t_1 = x/v\cos\theta = 1/16\cos\theta$ である、このときの y の速度は 0 になるので

$$0 = -gt + v\sin\theta = -g\frac{1}{16\cos\theta} + v\sin\theta \tag{11}$$

[*1] 地上での重力のみが力に加わった運動方程式から、この事実を導くことは可能なので、導いたことのない人は、やっておくこと。

より $\sin 2\theta = \frac{g}{8v} = \alpha$、つまり $\tan\theta = \frac{1}{\alpha}(1 \pm \sqrt{1-\alpha^2}), \alpha = 0.00306$ となる。したがって、50m 先にある、目標点は α が小さいので、テイラー展開で 1 次近時を行うと $\tan\theta = \frac{1}{\alpha}(1 \pm (1 + \frac{1}{2}\alpha^2))$ である。「ライフルで狙う」題意に合う解は、発射角が小さいものなので $\tan\theta = \alpha/2 = 0.00153125$ である。したがって、50m 先の目標点は

$$y_t = 50\tan\theta \sim 50 \times 0.00153125 \sim 0.077m \tag{12}$$

となるので、**0.077m である** (I-3)。

I-4

等速円運動の場合、加速度 α の大きさは

$$\alpha = R\omega^2 \tag{13}$$

で与えられる。ここに、地球の半径が 6367km であることを考慮すると[*2]、$R = 350 + 6378 = 6728km = 6.73 * 10^6 m$, $\omega = 2\pi/T\ 1/s$ であることが分かる。ただし、$T = 90 * 60 = 5400s$ したがって、

$$\alpha = R(\frac{2\pi}{T})^2 = 6.73 * 10^6 * (\frac{2\pi}{5400})^2 = 9.099m/s^2 \tag{14}$$

よって、**加速度の大きさは** $9.1m/s^2$ **である** (I-4)。

I-5

$R, \hat{x}, \hat{y}$ は時間に依存していないことに注意すると

$$r(\vec{t}) = R(\cos(\theta(t))\hat{x} + \sin(\theta(t))\hat{y}) \tag{15}$$

を微分すると速度ベクトルは

$$\frac{dr(\vec{t})}{dt} = -R\frac{d\theta(t)}{dt}(\sin(\theta(t))\hat{x} - \cos(\theta(t))\hat{y}) \tag{16}$$

となる。(I-5.1)
さらに微分を行うと加速度ベクトルは

$$\frac{d^2r(\vec{t})}{dt^2} = -R\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\Big(\sin(\theta(t))\hat{x} - \cos(\theta(t))\hat{y}\Big) - R\frac{d\theta(t)}{dt}\Big(\cos(\theta(t))\hat{x} + \sin(\theta(t))\hat{y}\Big) \tag{17}$$

$$= -R\left(\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\sin(\theta(t)) + \frac{d\theta(t)}{dt}\cos(\theta(t))\right)\hat{x} + R\left(\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}\cos(\theta(t)) - \frac{d\theta(t)}{dt}\sin(\theta(t))\right)\hat{y} \tag{18}$$

となる。(I-5.2)

I-6

1. 円運動の場合、動径方向への速度は持たないので、等速円運動に限らず、円周の接線方向を向く。すなわち、主張は**正しくない。**
2. 等速円運動でない場合は、接線方向の速度が常に変化しうるため、加速度ベクトルは、中心方向 + 接線方向の和で書かれる。したがって、等速円運動の時のみ、中心方向をもつ。すなわち、主張は**正しい。**

[*2] 赤道半径と、極半径の平均を取った。

これを数式で考えてみよう。まず、角度 $\theta(t)$ の時の円の接線ベクトル、法線ベクトルはそれぞれ

$$(-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t))) \tag{19}$$
$$(\cos(\theta(t)), \sin(\theta(t))) \tag{20}$$

である。これらは直交していることに注意が必要である。また、等速円運動の場合、$\theta = \omega t$ と書ける。

速度ベクトル (16) と、法線ベクトル (20) の内積をとると、0 になる。したがって、速度ベクトルは動径方向の成分が 0 である、すなわち、等速であろうがなかろうが、速度ベクトルの成分は接線方向だけであることが分かる。

次に、加速度ベクトル (18) と接線ベクトル (19) の内積をとると $\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$ である。等速円運動の場合 $\theta(t) = \omega t$ と書かれるため、0 になるが、非等速の場合[*3]は 0 にならない。以上から、等速の場合のみ、中心方向を持つ。

2 講評

2.1 採点基準

採点基準は、考え方・計算共に合っている場合○、考え方はあっているが計算は間違っている場合△、考え方が合っていない、もしくは考え方はあっているものの、計算がまったくできていない、計算、単位両方にミスがある場合などは×とした。評価は

S…パーフェクト (ただし、成績評価では A と同様に取り扱う。)

A…すべての問題で考え方が合っている、かつ計算ミスなどが 1 つ以内。

B…考え方の間違えが 1 つ。かつ計算ミスが 3 つ以内

C…それ以下

D…(評定なし) 未提出・遅れ・ほぼすべて間違っている・明らかな写しなど

とした。成績には関係ないが、印象のよい答案には B^{+} のように、「+」を付けたものもある。計算ミスなどでもったいない減点が多いけれども、中身は (場合によっては A より) 優れてる答案もあったので、せめてもの救いに、ということで行った…けれども残念ながら成績上はただの B である。今回は、採点自体は厳しく付けたが、評価は甘めである。まったく減点 0 である、S の人は 3 人。他の人も、テストでは無いので、じっくり考えたり、友達と議論する余裕は沢山あるはずですから、次回はもっとがんばりましょう。

2.2 各設問について

I-1,2

良くできていた。到達時刻の桁を間違える誤解等があったが、「0.043 秒後にホームベースにたどり着く」ボールはどんな凄腕のバッターでも打てないでしょう。**計算で答えを出すだけでなく、自然現象と合致した答えが出ているかどうかを確かめましょう。**これは、他の問題でも共通である。I-2 で、1m と大雑把過ぎる解答

[*3] 物理で用いる関数は、無限階微分可能であり、テイラー展開の収束条件を満たす関数であると仮定している。そのような性質のいい関数である $\theta(t)$ は、t のべき級数で展開することが可能である。すなわち、等速でない場合、t^2 以上の項を含むことを意味する。もっとも、n 解微分可能な関数はテイラーの定理より、n 次多項式になることは言えるので、2 階以上微分可能な関数であればよい。そもそも、$\theta(t)$ の具体系を与えていないのに、2 階微分が書かれていることが実は問題である。今回は「微分可能なんだろうと仮定する」のが正しいスタンスではあるが、普段から、与えられた関数を無意識のうちに微分するのではなく、「微分してもよいのかな？」と常に考えなくてはいけない。

が多かったので、最初は△にしたが、問題文を見ると (あまりそうは思えないが)1cm,10cm,1m から選べ、と読むこともできるので正解とした。せっかく大学生になったのだし、どう答えるか位は自分で考えましょう。

この問題では、摩擦や回転を考えていない。現実のボールは、大きさを持ち、空気抵抗を受け、回転による運動の影響も考えなければならない。この問題のように、すべてを無視した計算でも大体の雰囲気は掴めますが、現実にはもっと複雑な運動をしていることを忘れないようにしましょう。

I-3

非常に出来が悪かった。ライフルを水平に打ち出した場合の落ちた距離を計算した答案が多いが、間違いである。少し上に向かってライフルを撃つのだから、はじめから、「打ち出す角度」を決めて、方程式を立てなければならない。また、「高さ」を聞いているのに「角度」を答えている回答も目立った。**何を聞かれているか、という事は答える上で最も大切な点である**[*4]。また、角度を計算する段階で、2 次方程式が解けない答案も多かった。中学か高校で習ったはずの、解の公式を使えばよいだけなのに…。その先は、模範解答のように Taylor 展開を使うべきだが、もしできなくても、電卓を使うくらいのことはできるはず[*5]。二次方程式まで解いて、答えにたどり着いた際、答えが 2 つ出てくるが、ひとつは 7.7cm くらいで、もうひとつは 32km くらいである。冷静に考えてみましょう。32km 上を狙う解に現実的な意味はありますか？ (そんなことできる人は、たぶんこの世にいません。) ここまでたどり着いた人は、もちろん正解にしたが、数名「32km の解は現実的ではないので、答えは 7.7cm」と書いている人もいた。すばらしいです。他の皆さんも、これからは自然現象と、解いた結果との対応を良く考えるようにしてみましょう。

I-4

つまらないミスが多かった。公式に代入するだけなので[*6]きちんと計算しましょう。それから、数値を求めているのに、「$3289\pi^2$」のように、π を含んだ数値を解答にしているケースがあった。きちんと代入しましょう (減点対象)。さらに、$\pi = 3$ と"ゆとり近似"を行っている解答もあったが…理系なら 3.1415 くらいまで知ってますよね…？。電卓使ってもいいんだから、ちゃんと代入しましょう。

I-5

ただの計算問題です。単位ベクトル自体の微分をする必要は無いので、結構簡単なはずですが、割と計算ミスが多かったので、注意深く計算しましょう。

I-6

模範解答の前半のように、文章だけできちんと説明することも可能だが、きちんと数式から説明しようとしている解答が沢山あった (このような定量評価は非常に重要)。「分かりません」と言う人は、「加速度の意味」を考えてみたり、「I-5 で式を求めたんだし、それを使ってみよう！」と思ってみたりするとよかったでしょう。

[*4] これは、物理に限らず、現実社会一般において、非常に重要なことである。「好きな食べ物は何？」と聞かれて、「セロリが嫌い！」と答えるのは、質問に答えていない。

[*5] ちなみに、模範解答作ったり、採点する際には、電卓大活躍でしたよ。現代の物理学では、とても手で計算できない問題を、コンピュータで膨大な時間計算させて解く研究が非常に多いです。確かに、今回の計算は手でやれるので、やるに越したことは無いですが、現代社会にすでに存在している道具を使うのは、悪いことでは無いです。ただし、電卓の原理くらいは理解したほうがよいでしょう。

[*6] もちろん、その公式を導けるようになっている必要はある。