2009 年度冬学期　電磁気学 A　演習問題 (4)(5) 略解（担当：加藤雄介）
2010.01.30

演習問題 (4) 第 1 問.　1. $2\pi\rho B(\rho)$.

2. Ampère の法則により

$$2\pi\rho B(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I\rho^2}{R^2} & \rho \leq R \\ \\ \mu_0 I & \rho > R \end{cases}$$

3.

$$B(\rho) = \begin{cases} \frac{\mu_0 I\rho}{2\pi R^2} & \rho \leq R \\ \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & \rho > R \end{cases}$$

4. x, y 軸を $\hat{x} = \hat{\rho}$, $\hat{y} = \hat{z} \times \hat{\rho}$ と採る。電流が流れている円柱領域を、断面積が十分小さくほとんど直線電流とみなせる円柱領域に分割する。分割後の細い円柱領域のラベルを i とし、その断面積を ΔS_i, 断面の代表点の x, y 座標を x_i, y_i とする。細い柱状領域を流れる電流は $I\Delta S_i/(\pi R^2)$ で与えられるので、Biot-Savort の法則から得られる直線電流が作る磁場の表式を用いると、

$$\vec{B}(\mathrm{P}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 R^2} \lim_{\Delta S_i \to 0} \sum_i \frac{(\rho - x_i)\hat{z} \times \hat{\rho} + y_i\hat{\rho}}{(\rho - x_i)^2 + y_i^2} \Delta S_i = \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 R^2} \int_{x'^2+y'^2 \leq R^2} \frac{(\rho - x')\hat{z} \times \hat{\rho} + y'\hat{\rho}}{(\rho - x')^2 + y'^2} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

となる。積分領域は $y' = 0$ について対称であるので y' の奇関数の積分 $\int_{x'^2+y'^2 \leq R^2} \frac{y'}{(\rho-x')^2+y'^2} \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$ はゼロになる。残りの部分は $\vec{B}(\mathrm{P}) = B(\rho)\hat{z} \times \hat{\rho}$ と書くことができる。

演習問題 (4) 第 2 問.　Ampère の法則により

$$2\pi\rho B(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ \frac{\mu_0 I(\rho^2 - a^2)}{b^2 - a^2} & a \leq \rho \leq b \\ \\ \mu_0 I & b < \rho \end{cases}$$

これより、

$$B(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho < a \\ \frac{\mu_0 I(\rho^2 - a^2)}{2\pi\rho(b^2 - a^2)} & a \leq \rho \leq b \\ \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & b < \rho \end{cases}$$

演習問題 (4) 第 3 問.

$$B(\rho) = \begin{cases} 0 & \rho < a_1 \\ \frac{\mu_0 I(\rho^2 - a_1^2)}{2\pi\rho(b_1^2 - a_1^2)} & a_1 \le \rho \le b_1 \\ \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & b_1 < \rho \le a_2 \\ \\ \frac{\mu_0 I(b_2^2 - \rho^2)}{2\pi\rho(b_2^2 - a_2^2)} & a_2 \le \rho \le b_2 \\ 0 & b_2 \le \rho \end{cases}$$

$b_1 \to a_1 + 0,\ b_2 \to a_2 + 0$ の極限を取った後 $a_1 \le \rho \le a_2$ の領域で磁場のエネルギー密度を体積積分する。z 軸方向の積分区間の長さを l とすると、

$$\int \frac{B(\rho)^2}{2\mu_0} \mathrm{d}V = 2\pi l \int_{a_1}^{a_2} \rho \frac{B(\rho)^2}{2\mu_0} \mathrm{d}\rho = \frac{\mu_0 l I^2}{4\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

これが $LI^2/2$ に等しいから軸方向単位長さ当たりのインダクタンスは

$$\frac{L}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{a_2}{a_1}$$

演習問題 (5) 第 1 問. 講義ノート参照。

演習問題 (5) 第 2 問. 講義ノート参照。

演習問題 (5) 第 3 問. 電磁誘導の法則の積分形

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{1}$$

において、向きの決まっている閉曲線 C に対して、それを縁とし、かつ法線ベクトルが C の向きと右ねじの法則によって定まっている面 S は複数存在する。(1) の右辺は単独磁荷が存在する場合には面の採り方に依存してしまうのでこのままでは成立しない。閉曲線 C に対して、それを縁とし、かつ法線ベクトルが C の向きと右ねじの法則によって定まっている面 S_1 と S_2 があり、S_2 と同じ曲面で法線ベクトルが反対向きのものを S_2' とし、$S_1 + S_2'$ が外向き閉曲面をなすとする (講義ノート参照)。

$$\int_{S_1} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} - \int_{S_2} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{S_1 + S_2'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \mu_0 \int_V \frac{\partial \rho_\mathrm{m}}{\partial t} \mathrm{d}V$$

V は外向き閉曲面 $S_1 + S_2'$ に囲まれる領域を表す。最右辺の式は磁荷密度が時間依存する場合には必ずしもゼロにならない。

単独磁荷が存在する場合に電磁誘導の法則を、Ampère-Maxwell の法則に倣って拡張するには

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = -\int_S \left(\mu_0 \vec{j}_\mathrm{m} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{2}$$

または微分形で

$$\mathrm{rot}\vec{E} = -\mu_0 \vec{j}_\mathrm{m} - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

とすればよい。実際

$$\int_{S;\ \text{任意の閉曲面}} \left(\mu_0 \vec{j}_\mathrm{m} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

が成り立つので、(2) の右辺は面の選び方によらず一意に定まることが示される。