量子力学3 量子力学GII, 演習問題(1) 第二量子化（担当：加藤雄介）
解答例　2013.11.12

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。

問題I－1「第二量子化　基礎ベクトルの規格直交性」

$$\langle y_1, y_2, \cdots, y_M | x_1, x_2, \cdots, x_N \rangle = \frac{\delta_{M,N}}{N!} \sum_P \zeta^P \delta(y_1, x_{p(1)}) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) \tag{1}$$

を示せ。

解答例：

$P = (p(1), \cdots, p(N)) \in S_N$ の偶奇性は次のように判定することもできる。$1 \leq j < k \leq N$ のうち $p(j) > p(k)$ を満たす (j,k) の組（これを以下では反転対と呼ぶ）の数

$$\sharp[1 \leq j < k \leq N, \mathrm{s.t.}\, p(j) > p(k)] \tag{2}$$

が偶数のとき P は偶置換、奇数のときは奇置換となる (上の式において s.t. は such that の略)。たとえば $N = 2$ のとき、偶置換 (12) において $\sharp = 0$, 奇置換 (21) において $\sharp = 1$ であり、$N = 3$ のときの偶置換とそれに対する反転対の数を書き出すと

$$\begin{aligned} &(123) \quad \sharp = 0 \\ &(231) \quad \sharp = 2 \\ &(312) \quad \sharp = 2 \end{aligned}$$

となり、奇置換とそれに対する反転対の数は

$$\begin{aligned} &(132) \quad \sharp = 1 \\ &(213) \quad \sharp = 1 \\ &(321) \quad \sharp = 3 \end{aligned}$$

となる。

与えられた式 (1) を $M = N$ の場合に限定して考え、

$$\langle y_1, y_2, \cdots, y_N | x_1, x_2, \cdots, x_N \rangle = \frac{1}{N!} \sum_P \zeta^{\sharp[1 \leq j < k \leq N, \mathrm{s.t.}\, p(j) > p(k)]} \delta(y_1, x_{p(1)}) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) \tag{3}$$

と書き直して、帰納法で示す。(3) の左辺は

$$\frac{1}{N!} \langle 0 | \hat{\psi}(y_N) \cdots \hat{\psi}(y_1) \hat{\psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\psi}^\dagger(x_N) | 0 \rangle \tag{4}$$

となる。$\hat{\psi}(y_1)$ を $\hat{\psi}^\dagger$ との交換子をとりつつ、右に移動させていくと

$$\frac{1}{N!} \sum_{\ell=1}^{N} \zeta^{\ell-1} \delta(y_1, x_\ell) \langle 0 | \hat{\psi}(y_N) \cdots \hat{\psi}(y_2) \hat{\psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\psi}^\dagger(x_{\ell-1}) \hat{\psi}^\dagger(x_{\ell+1}) \cdots \hat{\psi}^\dagger(x_N) | 0 \rangle \tag{5}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\ell=1}^{N} \zeta^{\ell-1} \delta(y_1, x_\ell) \langle y_2, \cdots y_N | x_1, \cdots x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \cdots x_N \rangle \tag{6}$$

となる。$N-1$ の場合に (3) が成り立つとすると、(6) は $y_2, \cdots, y_N$ が $x_1, \cdots, x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, x_N$ の並べ替えのときのみゼロでないことがわかる。このとき $P \in S_N$ のうち、$p(1) = \ell$ を満たすものを用いて

$$\begin{aligned}
&\langle y_2, \cdots y_N | x_1, \cdots x_{\ell-1}, x_{\ell+1}, \cdots x_N \rangle && (7)\\
&= \frac{1}{(N-1)!} \sum_{P \in S_N} \delta_{p(1),\ell} \zeta^{\sharp[2 \le j < k \le N, \mathrm{s.t.} p(j) > p(k)]} \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) && (8)
\end{aligned}$$

と表される。ここで $\sum_{P \in S_N}$ において P の和は、S_N 全体にわたって取っているが、$\delta_{p(1),\ell}$ の因子によって和に制限を与えている。(6) と (8) より

$$\begin{aligned}
(3) \qquad &= \frac{1}{N!} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{P \in S_N} \delta_{p(1),\ell} \zeta^{\ell-1} \zeta^{\sharp[2 \le j < k \le N, \mathrm{s.t.} p(j) > p(k)]} \delta(y_1, x_\ell) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) && (9)\\
&= \frac{1}{N!} \sum_{\ell=1}^{N} \sum_{P \in S_N} \delta_{p(1),\ell} \utilde{\zeta^{p(1)-1} \zeta^{\sharp[2 \le j < k \le N, \mathrm{s.t.} p(j) > p(k)]}} \delta(y_1, x_{p(1)}) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) && (10)
\end{aligned}$$

を得る。さらに

$$\begin{aligned}
&p(1) - 1 + \sharp[2 \le j < k \le N, \mathrm{s.t.} p(j) > p(k)] && (11)\\
&= \sharp[1 < k \le N, \mathrm{s.t.} p(1) > p(k)] + \sharp[2 \le j < k \le N, \mathrm{s.t.} p(j) > p(k)] && (12)\\
&= \sharp[1 \le j < k \le N, \mathrm{s.t.} p(j) > p(k)] && (13)
\end{aligned}$$

より、(10) の波線部は ζ^P と書ける。 さらに

$$\sum_{\ell=1}^{N} \sum_{P \in S_N} \delta_{p(1),\ell} = \sum_{P \in S_N} \tag{14}$$

を用いれば

$$(3) \text{ の左辺} = (11) = \frac{1}{N!} \sum_{P \in S_N} \zeta^P \delta(y_1, x_{p(1)}) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) = (3) \text{ の右辺} \tag{15}$$

となる。

問題 I − 2「第二量子化　場の演算子の $|\Psi_\nu\rangle$ への作用」

$$\hat{\psi}(x) | x_1, \cdots, x_N \rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{j=1}^{N} \zeta^{j-1} \delta(x, x_j) | x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_N \rangle \tag{16}$$

が成り立つとすると

$$\hat{\psi}(x)|x_1,\cdots,x_{N+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}}\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(x_1)|x_2,\cdots,x_{N+1}\rangle \tag{17}$$

$$= \frac{\left(\delta(x,x_1)+\zeta\hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{\psi}(x)\right)}{\sqrt{N+1}}|x_2,\cdots,x_{N+1}\rangle \tag{18}$$

$$= \frac{\delta(x,x_1)}{\sqrt{N+1}}|x_2,\cdots,x_{N+1}\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{N+1}}\hat{\psi}^\dagger(x_1)\underline{\hat{\psi}(x)|x_2,\cdots,x_{N+1}\rangle} \tag{19}$$

$$= \frac{\delta(x,x_1)}{\sqrt{N+1}}|x_2,\cdots,x_{N+1}\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{N+1}}\hat{\psi}^\dagger(x_1)\underline{\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=2}^{N+1}\zeta^{j-2}\delta(x,x_j)|x_2,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_{N+1}\rangle}$$

$$= \frac{\delta(x,x_1)}{\sqrt{N+1}}|x_2,\cdots,x_{N+1}\rangle + \frac{\zeta}{\sqrt{N+1}}\hat{\psi}^\dagger(x_1)\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=2}^{N+1}\zeta^{j-2}\delta(x,x_j)|x_2,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_{N+1}\rangle$$

$$= \frac{\delta(x,x_1)}{\sqrt{N+1}}|x_2,\cdots,x_{N+1}\rangle + \frac{1}{\sqrt{N+1}}\sum_{j=2}^{N+1}\zeta^{j-1}\delta(x,x_j)\underline{\underline{\frac{\hat{\psi}^\dagger(x_1)}{\sqrt{N}}|x_2,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_{N+1}\rangle}} \tag{20}$$

$$= \frac{\delta(x,x_1)}{\sqrt{N+1}}|x_2,\cdots,x_{N+1}\rangle + \frac{1}{\sqrt{N+1}}\sum_{j=2}^{N+1}\zeta^{j-1}\delta(x,x_j)\underline{\underline{|x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_{N+1}\rangle}} \tag{21}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N+1}}\sum_{j=1}^{N+1}\zeta^{j-1}\delta(x,x_j)|x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_{N+1}\rangle \tag{22}$$

が成り立つ。$N=1$ のとき (16) が成り立つ (容易に示せる) ことを認めると (16) は数学的帰納法で示されたことになる。これを用いて、

$$\hat{\psi}(x_1)|\Psi_\nu\rangle = \sqrt{N}\int \mathrm{d}y_2\cdots\int \mathrm{d}y_N\,\Psi_\nu(x_1,y_2,\cdots y_N)|y_2,\cdots,y_N\rangle \tag{23}$$

は

$$\hat{\psi}(x)|\Psi_\nu\rangle \tag{24}$$

$$= \int \mathrm{d}y_1\cdots\int \mathrm{d}y_N\,\Psi_\nu(y_1,y_2,\cdots y_N)\hat{\psi}(x)|y_1,\cdots,y_N\rangle \tag{25}$$

$$= \int \mathrm{d}y_1\cdots\int \mathrm{d}y_N\,\Psi_\nu(y_1,y_2,\cdots y_N)\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\zeta^{j-1}\delta(x,y_j)|y_1,\cdots,y_{j-1},y_{j+1},\cdots,x_N\rangle \tag{26}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\int \mathrm{d}y_1\cdots\int \mathrm{d}y_N\underline{\zeta^{j-1}\Psi_\nu(y_1,\cdots,y_{j-1},x,y_{j+1},\cdots y_N)}|y_1,\cdots,y_{j-1},y_{j+1},\cdots,x_N\rangle \tag{27}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\int \mathrm{d}y_1\cdots\int \mathrm{d}y_{j-1}\int \mathrm{d}y_{j+1}\int \mathrm{d}y_N\underline{\Psi_\nu(x,y_1,\cdots,y_{j-1},y_{j+1},\cdots y_N)}|y_1,\cdots,y_{j-1},y_{j+1},\cdots,x_N\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\int \mathrm{d}y_2\cdots\int \mathrm{d}y_N\,\Psi_\nu(x,y_2,\cdots,y_N)|y_2,\cdots,y_N\rangle \quad \text{dummy variables の取替え} \tag{28}$$

$$= \sqrt{N}\int \mathrm{d}y_2\cdots\int \mathrm{d}y_N\,\Psi_\nu(x,y_2,\cdots,y_N)|y_2,\cdots,y_N\rangle \tag{29}$$

のように示される。

問題 I − 3「第二量子化　$|\Psi_\nu\rangle$ の完全性」

$$\sum_\nu \Psi_\nu(x_1,\cdots,x_N)\Psi^*_\nu(x'_1,\cdots,x'_N)=\frac{1}{N!}\sum_{P\in S_N}\zeta^P\delta(x'_1,x_{p(1)})\cdots\delta(x'_N,x_{p(N)})$$

の右辺は

$$\langle x_1,\cdots,x_N|x'_1,\cdots,x'_N\rangle \tag{30}$$

とかける。左辺は

$$\Psi(x_1,\cdots,x_N)=\langle x_1,\cdots,x_N|\Psi\rangle$$

$$\Psi^*(x_1,\cdots,x_N)=\langle \Psi|x'_1,\cdots,x'_N\rangle$$

を用いると

$$\sum_\nu\langle x_1,\cdots,x_N|\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu|x'_1,\cdots,x'_N\rangle \tag{31}$$

$$=\langle x_1,\cdots,x_N|\left(\sum_\nu|\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu|\right)|x'_1,\cdots,x'_N\rangle \tag{32}$$

とかける。よって、

$$\langle x_1,\cdots,x_N|\left(\sum_\nu|\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu|\right)|x'_1,\cdots,x'_N\rangle=\langle x_1,\cdots,x_N|x'_1,\cdots,x'_N\rangle \tag{33}$$

すなわち、

$$\sum_\nu|\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu|=1$$

となる。

問題 I − 4「第二量子化　場の演算子を用いた一粒子演算子の表式」

$$\langle\Psi|\int \mathrm{d}x_1\hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{o}^{(1)}(x_1)\hat{\psi}(x_1)|\Psi\rangle \tag{34}$$

$$=N\int\mathrm{d}x_1\int\mathrm{d}x'_2\cdots\int\mathrm{d}x'_N\int\mathrm{d}x_2\cdots\int\mathrm{d}x_N \tag{35}$$

$$\Psi^*(x_1,x'_2,\cdots,x'_N)\hat{o}^{(1)}(x_1)\Psi(x_1,x_2,\cdots,x_N)\langle x'_2,\cdots,x'_N|x_2,\cdots,x_N\rangle \tag{36}$$

$$=N\sum_{P\in S_{N-1}}\frac{\zeta^P}{(N-1)!}\int\mathrm{d}x_1\cdots\int\mathrm{d}x_N\Psi^*(x_1,x_{p(2)},\cdots,x_{p(N)})\hat{o}^{(1)}(x_1)\Psi(x_1,\cdots,x_N) \tag{37}$$

$$=N\int\mathrm{d}x_1\int\mathrm{d}x_2\cdots\int\mathrm{d}x_N\Psi^*(x_1,x_2,\cdots,x_N)\hat{o}^{(1)}(x_1)\Psi(x_1,x_2,\cdots,x_N) \tag{38}$$

である。一方、

$$\int \mathrm{d}x_1 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi^*(x_1, x_2, \cdots, x_N) \left(\sum_{j=1}^{N} \hat{o}^{(1)}(x_j) \right) \Psi(x_1, x_2, \cdots, x_N) \tag{39}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi^*(x_1, \cdots, x_N) \hat{o}^{(1)}(x_j) \Psi(x_1, \cdots, x_N) \tag{40}$$

$$= \sum_{j=1}^{N} \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \cdots \int \mathrm{d}x_N \zeta^{j-1} \Psi^*(x_j, x_1, \cdots, x_N) \hat{o}^{(1)}(x_j) \zeta^{j-1} \Psi(x_j, x_1, \cdots, x_N) \tag{41}$$

$$= N \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi^*(x_1, \cdots, x_N) \hat{o}^{(1)}(x_1) \Psi(x_1 \cdots, x_N) \tag{42}$$

よって (34)=(39) である。

問題 I − 5「第二量子化　場の演算子を用いた二粒子演算子の表式」

$$\langle \Psi | \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) \hat{o}^{(2)}(x_1, x_2) \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) | \Psi \rangle \tag{43}$$

$$= \frac{N(N-1)}{2} \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \int \mathrm{d}x'_3 \cdots \int \mathrm{d}x'_N \int \mathrm{d}x_3 \cdots \int \mathrm{d}x_N \tag{44}$$

$$\Psi^*(x_1, x_2, x'_3 \cdots, x'_N) \hat{o}^{(2)}(x_1, x_2) \Psi(x_1, x_2, x_3 \cdots, x_N) \langle x'_3, \cdots, x'_N | x_3, \cdots, x_N \rangle \tag{45}$$

$$= \frac{N(N-1)}{2} \sum_{P \in S_N} \frac{\delta_{p(1),1} \delta_{p(2),2} \zeta^P}{(N-2)!} \int \mathrm{d}x_1 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi^*(x_1, x_2, x_{p(3)} \cdots, x_{p(N)}) \hat{o}^{(2)}(x_1, x_2) \Psi(x_1, \cdots, x_N)$$

$$= \frac{N(N-1)}{2} \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi^*(x_1, x_2, \cdots, x_N) \hat{o}^{(2)}(x_1, x_2) \Psi(x_1, \cdots, x_N) \tag{46}$$

一方

$$\int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi^*(x_1, x_2, \cdots, x_N) (\sum_{j<k} \hat{o}^{(2)}(x_j, x_k))(x_1, x_2) \Psi(x_1, \cdots, x_N) \tag{47}$$

$$= \sum_{j<k} \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi^*(x_1, \cdots, x_N) \hat{o}^{(2)}(x_j, x_k) \Psi(x_1, \cdots, x_N) \tag{48}$$

$$= \sum_{j<k} \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \cdots \int \mathrm{d}x_N \zeta^{j-1+k-2} \Psi^*(x_j, x_k, x_1, \cdots, x_N) \hat{o}^{(2)}(x_j, x_k) \zeta^{j-1+k-2} \Psi(x_j, x_k, x_1, \cdots, x_N)$$

$$= \sum_{j<k} \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi^*(x_1, x_2, \cdots, x_N) \hat{o}^{(2)}(x_1, x_2) \Psi(x_1, x_2 \cdots, x_N) \tag{49}$$

$$= \frac{N(N-1)}{2} \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \cdots \int \mathrm{d}x_N \Psi^*(x_1, x_2, \cdots, x_N) \hat{o}^{(2)}(x_1, x_2) \Psi(x_1, \cdots, x_N) \tag{50}$$

よって (43)=(47) である。

問題 I − 6「第二量子化　粒子数演算子」

略（ヒントに従って解けばよい。）

問題 I − 7「第二量子化　基礎ベクトルの意味」

以下に示す計算により

$$\hat{\rho(x)}|x_1,\cdots,x_N\rangle=\sum_{j=1}^{N}\delta(x-x_j)|x_1,\cdots,x_N\rangle \tag{51}$$

となる。これから、基礎ベクトル（基底をなすベクトル=basis vector）$|x_1,\cdots,x_N\rangle$ は $x_1,\cdot,x_N$ に粒子が一つずついる状態を表すことがわかる。

解法 1

$$\begin{aligned}
[\hat{\rho}(x),\hat{\psi}^\dagger(x_j)] &= \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(x_j)-\hat{\psi}^\dagger(x_j)\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x) && (52)\\
&= \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)\hat{\psi}^\dagger(x_j)-\zeta\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}^\dagger(x_j)\hat{\psi}(x) && (53)\\
&= \hat{\psi}^\dagger(x)[\hat{\psi}(x),\hat{\psi}^\dagger(x_j)]_\zeta && (54)\\
&= \delta(x,x_j)\hat{\psi}^\dagger(x) && (55)
\end{aligned}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
&\hat{\rho(x)}\hat{\psi}^\dagger(x_1)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle\\
=\;&\underbrace{[\hat{\rho(x)},\hat{\psi}^\dagger(x_1)]}_{\delta(x,x_1)}\hat{\psi}^\dagger(x_2)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle+\hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{\rho(x)}\hat{\psi}^\dagger(x_2)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle\\
=\;&\delta(x,x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_2)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle+\hat{\psi}^\dagger(x_1)\underbrace{[\hat{\rho(x)},\hat{\psi}^\dagger(x_2)]}_{\delta(x,x_2)}\hat{\psi}^\dagger(x_3)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle\\
&+\hat{\psi}^\dagger(x_1)\hat{\psi}^\dagger(x_2)\hat{\rho}(x)\hat{\psi}^\dagger(x_3)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle\\
&\cdots\cdots\\
&=\sum_{j=1}^{N}\delta(x,x_j)\hat{\psi}^\dagger(x_1)\cdots\hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle
\end{aligned}$$

となる。これから (51) が導かれる。

解法 2 I-2 より (16) が成り立つので

$$\hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)|x_1,\cdots,x_N\rangle=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{j=1}^{N}\zeta^{j-1}\delta(x,x_j)\hat{\psi}^\dagger(x)|x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_N\rangle \tag{56}$$

となる。ここで $\delta(x,x_j)\hat{\psi}^\dagger(x)=\delta(x,x_j)\hat{\psi}^\dagger(x_j)$ と

$$\frac{\zeta^{j-1}}{\sqrt{N}}\hat{\psi}^\dagger(x_j)|x_1,\cdots,x_{j-1},x_{j+1},\cdots,x_N\rangle=|x_1,\cdots,x_N\rangle \tag{57}$$

を用いると (56) から (51) が導かれる。