

量子物性特論 B, 演習問題 (1) 第二量子化 (担当: 加藤雄介) 2014.04.14

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。

I の目的

- 物理量の第二量子化表示 (エネルギー、局所物理量、密度行列)
- 第一量子化での波動関数と第二量子化での状態ベクトルの対応
- 第二量子化表示されたハミルトニアン の対角化 (応用)

問題 I - 01 「第二量子化 基礎ベクトルの規格直交性」

$$\langle y_1, y_2, \dots, y_M | x_1, x_2, \dots, x_N \rangle = \frac{\delta_{M,N}}{N!} \sum_P \zeta^P \delta(y_1, x_{p(1)}) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) \quad (1)$$

を示せ。

問題 I - 02 「第二量子化 場の演算子の $|\Psi_\nu\rangle$ への作用」

$$\hat{\psi}(x_1)|\Psi_\nu\rangle = \sqrt{N} \int dy_2 \cdots \int dy_N \Psi_\nu(x_1, y_2, \dots, y_N) |y_2, \dots, y_N\rangle \quad (2)$$

を示せ。

問題 I - 03 「第二量子化 $|\Psi_\nu\rangle$ の完全性」

$$\sum_\nu \Psi_\nu(x_1, \dots, x_N) \Psi_\nu^*(x'_1, \dots, x'_N) = \frac{1}{N!} \sum_{P \in S_N} \zeta^P \delta(x'_1, x_{p(1)}) \cdots \delta(x'_N, x_{p(N)})$$

ならば $\sum_\nu |\Psi_\nu\rangle \langle \Psi_\nu| = 1$ となることを示せ

問題 I - 04 「第二量子化 場の演算子を用いた二粒子演算子の表式」

$$\hat{O}^{(2)} \equiv \sum_{j < k} \hat{o}_{jk}^{(2)} \leftrightarrow \frac{1}{2} \int dx_1 \int dx_2 \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) \hat{o}^{(2)}(x_1, x_2) \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \quad (3)$$

を示せ。

問題 I - 05 「第二量子化 粒子数演算子」 $\hat{N} = \int dx \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x)$ に対して、

$$\hat{N}|x_1, \dots, x_M\rangle = M|x_1, \dots, x_M\rangle, \quad |x_1, \dots, x_M\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{M!}} \hat{\psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\psi}^\dagger(x_M) |0\rangle$$

が成り立つことを示せ。 ($\hat{\psi}(x)|0\rangle = 0$, $[\hat{N}, \hat{\psi}^\dagger(x)] = \hat{\psi}^\dagger(x)$ を用いよ。)

問題 I - 06 「第二量子化 粒子数密度」

スピン 1/2 を持つフェルミオン系における粒子数密度 $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ を場の演算子 $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$ を用いて表せ。

問題 I - 07 「第二量子化 粒子流密度 (中性原子)」

スピン 0、電荷 0 のボソン系における粒子流密度を場の演算子 $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ を用いて表せ。

問題 I - 08 「第二量子化 電流密度 (荷電粒子)」

スピン $1/2$, 電荷 q のフェルミオン系における電流密度を場の演算子 $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$ を用いて表せ。

問題 I - 09 「第二量子化 スピン密度」

スピン $1/2$ を持つフェルミオン系におけるスピン密度

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{s}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

の x, y, z 成分それぞれを場の演算子 $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$ を用いて表せ。

問題 I - 10 「第二量子化 スピン密度」

スピン $1/2$ を持つフェルミオン系におけるスピン密度

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^N \mathbf{s}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

の x, y, z 成分それぞれを場の演算子 $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r})$, $\sigma = \uparrow, \downarrow$ を用いて表せ。

問題 I - 11 「第二量子化 生成消滅演算子」

スピン $1/2$ を持つフェルミオン系における 1 粒子状態

$$\varphi_{k,\uparrow}(\mathbf{r}, \sigma) = \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\sqrt{\Omega}} \alpha(\sigma) \quad (4)$$

$$\varphi_{k,\downarrow}(\mathbf{r}, \sigma) = \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\sqrt{\Omega}} \beta(\sigma) \quad (5)$$

(Ω は体積) に対する消滅演算子をそれぞれ $\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}, \hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow}$ とする。このとき

$$\sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\uparrow,\downarrow} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}_{\mathbf{k},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},s} \quad (6)$$

$$\frac{1}{2\Omega} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}', \mathbf{q}} \sum_{s=\uparrow,\downarrow} \sum_{s'=\uparrow,\downarrow} \frac{U_0}{q^2 + \kappa^2} \hat{a}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}',s'} \hat{a}_{\mathbf{k},s} \quad (7)$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar}{2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} - \hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow} \right) \quad (8)$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar}{2} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow} + \hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} \right) \quad (9)$$

$$\sum_{\mathbf{k}} \frac{\hbar}{2i} \left(\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow} - \hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow} \right) \quad (10)$$

はそれぞれどのような物理量を表すか。

問題 I - 12 「第二量子化 状態ベクトルと波動関数の対応」

$|\text{vac}\rangle$ を真空の状態ベクトルとする。スピン $1/2$ のフェルミオンの 2 粒子状態を表す状態ベクトル

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_1,\uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2,\downarrow}^\dagger |\text{vac}\rangle \quad (11)$$

に対応する波動関数 $\Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2)$ を求めよ。

問題 I - 13 「第二量子化 状態ベクトルと波動関数の対応」

$|\text{vac}\rangle$ を真空の状態ベクトルとする。スピン $1/2$ のフェルミオンの 2 粒子状態を表す状態ベクトル

$$\left(\hat{a}_{\mathbf{k}_1, \uparrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2, \downarrow}^\dagger - \hat{a}_{\mathbf{k}_1, \downarrow}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2, \uparrow}^\dagger \right) |\text{vac}\rangle \quad (12)$$

に対応する波動関数 $\Psi(\mathbf{r}_1, \sigma_1, \mathbf{r}_2, \sigma_2)$ を求めよ。その状態が合成スピン角運動量の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

問題 I - 14 「第二量子化 状態ベクトルと波動関数の対応」

$|\text{vac}\rangle$ を真空の状態ベクトルとする。スピン $1/2$ のフェルミオンの N 粒子状態を表す状態ベクトル

$$\hat{a}_{\mathbf{k}_1, \sigma_1}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}_2, \sigma_2}^\dagger \cdots \hat{a}_{\mathbf{k}_N, \sigma_N}^\dagger |\text{vac}\rangle \quad (13)$$

に対応する波動関数を求めよ。ただし、 $\mathbf{k}_j = \mathbf{k}_l$ のとき、 $\sigma_j \neq \sigma_l$ とする。

問題 I - 15 「生成演算子の性質」物理量 $\hat{O}$ に対して、固有値 μ の固有状態 $|\mu\rangle$

$$\hat{O}|\mu\rangle = \mu|\mu\rangle$$

があるとする。生成演算子 $\hat{a}_j$ ($j = 1, 2, \dots$ は 1 粒子状態のインデックス) が交換関係

$$[\hat{O}, \hat{a}_j^\dagger] = \lambda_j \hat{a}_j^\dagger$$

を満たすとき、状態

$$\hat{a}_1^\dagger \hat{a}_2^\dagger \cdots \hat{a}_l^\dagger |\mu\rangle \quad (14)$$

は $\hat{O}$ の固有状態であり、その固有値は

$$\mu + \sum_{j=1}^l \lambda_j \quad (15)$$

で与えられることを示せ。

問題 I - 16 「生成演算子の性質」物理量 $\hat{O}$ に対して、生成演算子 $\hat{a}_j$ ($j = 1, 2, \dots$ は 1 粒子状態のインデックス) が交換関係

$$[\hat{O}, \hat{a}_j^\dagger] = \lambda_j \hat{a}_j^\dagger$$

を満たすとき、関係式

$$e^{u\hat{O}} \hat{a}_j^\dagger e^{-u\hat{O}} = e^{u\lambda_j} \hat{a}_j^\dagger \quad (16)$$

を示せ。