2016 年度夏学期　熱力学（担当：加藤雄介）
レポート課題I解答例 2016.06.07 (文責：福井)

問２（２）

k 個のおもりを取り去った直後の外圧を P_k、その後平衡状態に達したときの容器内の気体の温度を T_k、体積を V_k、このときの内部エネルギーの変化を ΔU_k、気体のされる仕事を W_k^{ex} とする。N 個おもりを取り去ることを考えると

$$\begin{aligned} P_0 &= P_{\mathrm{i}},\, P_N = P_{\mathrm{f}} && (1)\\ T_0 &= T_{\mathrm{i}},\, T_N = T_{\mathrm{f}} && (2)\\ V_0 &= V_{\mathrm{i}},\, V_N = V_{\mathrm{f}}^{(N)} = V_{\mathrm{f}} && (3) \end{aligned}$$

である。ここで

$$W_{k+1}^{\mathrm{ex}} = -P_{k+1}(V_{k+1} - V_k), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \Delta U_{k+1} &= cnR(T_{k+1} - T_k) \\ &= c(P_{k+1}V_{k+1} - P_k V_k) \end{aligned} \tag{5}$$

である。最終行は理想気体の状態方程式を用いて得た。断熱変化を考えているので、熱力学第一法則より

$$\Delta U_{k+1} = W_{k+1}^{\mathrm{ex}} \tag{6}$$

が成立するので

$$c(P_{k+1}V_{k+1} - P_k V_k) = -P_{k+1}(V_{k+1} - V_k). \tag{7}$$

式を整理すると

$$\begin{aligned} \frac{V_{k+1}}{V_k} &= \frac{P_{k+1} + cP_k}{(c+1)P_{k+1}} \\ &= 1 + \frac{c(P_k - P_{k+1})}{(c+1)P_{k+1}} \\ &= 1 + \frac{P_k - P_{k+1}}{\gamma P_{k+1}} \\ &= 1 + \frac{P_{\mathrm{i}} - P_{\mathrm{f}}}{\gamma N\{P_{\mathrm{i}} - (P_{\mathrm{i}} - P_{\mathrm{f}})(k+1)/N\}} \end{aligned} \tag{8}$$

となる。二行目から三行目への変形は

$$\gamma = 1 + \frac{1}{c} \tag{9}$$

を用い、四行目へは

$$P_k = P_{\mathrm{i}} - (P_{\mathrm{i}} - P_{\mathrm{f}})\frac{k}{N} \tag{10}$$

を用いた。これより

$$\frac{V_{\mathrm{f}}^{(N)}}{V_{\mathrm{i}}} = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{V_{k+1}}{V_k} = \prod_{k=0}^{N-1} \left[1 + \frac{P_{\mathrm{i}} - P_{\mathrm{f}}}{\gamma N\{P_{\mathrm{i}} - (P_{\mathrm{i}} - P_{\mathrm{f}})(k+1)/N\}} \right]. \tag{11}$$

問２（３）

（$V_\mathrm{f}^{(N)}/V_\mathrm{i}$ は正なので）対数をとって、$N\to\infty$ を考えると、

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\ln\frac{V_\mathrm{f}^{(N)}}{V_\mathrm{i}} &= \lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\ln\left[1+\frac{P_\mathrm{i}-P_\mathrm{f}}{\gamma N\{P_\mathrm{i}-(P_\mathrm{i}-P_\mathrm{f})(k+1)/N\}}\right] \\ &= \frac{P_\mathrm{i}-P_\mathrm{f}}{\gamma}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}\frac{1}{P_\mathrm{i}-(P_\mathrm{i}-P_\mathrm{f})(k+1)/N}.\end{aligned} \tag{12}$$

ここで、N が十分大きいと一行目右辺の対数関数の中の第二項が 1 よりはるかに小さくなるので、対数関数の Taylor 展開 $\ln(1+x)\simeq x$ を用いた。さらに、

$$x_k = \frac{k+1}{N} \tag{13}$$

$$\Delta x_k = \frac{1}{N} \tag{14}$$

とすると

$$\lim_{\Delta x_k\to 0}\sum_{k=0}^{N-1}\Delta x_k\frac{1}{P_\mathrm{i}-(P_\mathrm{i}-P_\mathrm{f})x_k} = \int_0^1 \mathrm{d}x\ \frac{1}{P_\mathrm{i}-(P_\mathrm{i}-P_\mathrm{f})x} \tag{15}$$

と区分求積を行うことができ、積分を実行すると

$$\ln\frac{V_\mathrm{f}^{(\infty)}}{V_\mathrm{i}} = \lim_{N\to\infty}\ln\frac{V_\mathrm{f}^{(N)}}{V_\mathrm{i}} = -\frac{1}{\gamma}\ln\frac{P_\mathrm{f}}{P_\mathrm{i}} \tag{16}$$

となるので指数関数の方に乗せれば

$$\frac{V_\mathrm{f}^{(\infty)}}{V_\mathrm{i}} = \left(\frac{P_\mathrm{f}}{P_\mathrm{i}}\right)^{-\gamma} \tag{17}$$

が求まる。