補足説明

区分求積法：

$$x_0(=a) < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n(=b)$$

または

$$x_0(=a) > x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > x_n(=b)$$

となる $\{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ において $n \to \infty$ かつ $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ がどの $k \in [0, n-1]$ に対してもゼロに収束する極限を $\lim_{\Delta x_k \to 0}$ と表す。$x \in [a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \tag{1}$$

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \tag{2}$$

が成り立つ。これらの関係式を用いて数列和の極限を積分を用いて評価する方法をここでは区分求積法と呼んでいる。

注：$\Delta x_k = \frac{b-a}{n} (\equiv \Delta x)$, $x_k = x_0 + (k-1)\Delta x$ であれば既習の内容のはず。分割区間の幅 $|\Delta x_k|$ が不揃い (k に依存するということ) である場合でも $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a$, かつ $|\Delta x_k| \to 0$ であれば、これまでに習ってきた区分求積法と同様な手法を用いることができる。また $\alpha > 1$ のとき

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) (\Delta x_k)^\alpha = 0 \tag{3}$$

$$\lim_{\Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) (\Delta x_k)^\alpha = 0 \tag{4}$$

が成り立つ。

Taylor 展開：ln は $e = 2.718281\cdots$(Napier の数) を底とした対数、自然対数を表す。$|x-1| < 1$ のとき $\ln(1+x)$ は

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \tag{5}$$

と表される。