

問 1 断熱過程、理想気体の例題 5/6 の講義で紹介した例題の解答例は以下のとおり。

1. $W_{\text{ex}} = -P_f V_f^{(1)} + P_i V_i < 0$.
2. この過程は断熱過程であるから、 $\Delta U = W_{\text{ex}} < 0$.
- 3.

$$\begin{aligned}\Delta U &= cnRT_f^{(1)} - cnRT_i \\ &= cP_f V_f^{(1)} - cP_i V_i\end{aligned}$$

一行目から 2 行目は状態方程式を用いた。よって

$$cP_f V_f^{(1)} - cP_i V_i = -P_f V_f^{(1)} + P_i V_i$$

これを $V_f^{(1)}/V_i$ について解くと

$$\frac{V_f^{(1)}}{V_i} = \frac{1}{c+1} \left(c \frac{P_i}{P_f} + 1 \right) \quad (1)$$

4. 追加問題の解答例：

$$P_f^{\frac{3}{5}}(V_f^{(1)}) > P_i^{\frac{3}{5}} V_i$$

を示せばよい。 $x = \frac{P_i}{P_f} > 1$ を用いると

$$\frac{P_f^{\frac{3}{5}}(V_f^{(1)})}{P_i^{\frac{3}{5}} V_i} = x^{-\frac{3}{5}} \left(\frac{3x}{5} + \frac{2}{5} \right)$$

となる。 $x > 1$ で $\frac{3x}{5} + \frac{2}{5} > x^{\frac{3}{5}}$ である（説明略）ので

$$P_f^{\frac{3}{5}}(V_f^{(1)}) > P_i^{\frac{3}{5}} V_i$$

両辺の $\frac{5}{3}$ 乗をとり、

$$P_f(V_f^{(1)})^{\frac{5}{3}} > P_i V_i^{\frac{5}{3}}$$

を得る。

問 2 断熱過程、理想気体の例題 (1) 問 1 と同様な計算により、 $P_m = (P_i + P_f)/2$ として

$$\frac{V_f^{(2)}}{V_i} = \left(\frac{1}{c+1} \left(c \frac{P_m}{P_f} + 1 \right) \right) \left(\frac{1}{c+1} \left(c \frac{P_i}{P_m} + 1 \right) \right) = \frac{1}{(c+1)^2} \left(\frac{c}{2} \frac{P_i}{P_f} + \frac{c+2}{2} \right) \left(1 + \frac{2cP_i}{P_i + P_f} \right) \quad (2)$$

(1) と (2) より

$$\frac{V_f^{(2)} - V_f^{(1)}}{V_i} = -\frac{c}{(c+1)^2} \frac{(P_i - P_f)^2}{2P_f(P_i + P_f)} < 0$$

となる。別解として講義で紹介した背理法による証明がある。