2014 年度夏学期熱力学演習問題 1 解答例 (文責：久恒)

2014 年 6 月 19 日

I-5　準静的でない断熱過程 3（断熱サイクルの不存在）

圧力	体積	温度	操作
$P_i = P_a$	V_i	T_i	
P_m	V_m	T_m	質量 M のおもりを速やかにおいて断熱容器の中が平衡状態になるまで待った（操作 1 と呼ぶ）
$P_f = P_a$	V_f	T_f	質量 M のおもりを取り除いて断熱容器の中が平衡状態になるまで待った（操作 2 と呼ぶ）

まず釣り合いを考えることで

$$P_m = P_a + \frac{Mg}{S}$$

である。次に操作 1 の後の内部エネルギーの変化を考えると、

$$cP_mV_m = cP_aV_i + P_m(V_i - V_m)$$

だから

$$V_m = \frac{(c+1)P_a + \frac{Mg}{S}}{(c+1)(P_a + \frac{Mg}{S})}V_i$$

次に操作 2 の後の内部エネルギーの変化を考えると

$$cP_aV_f = cP_mV_m + P_f(V_m - V_f)$$

だから

$$V_f = \frac{(c+1)P_a + \frac{cMg}{S}}{(c+1)P_a} \cdot \frac{(c+1)P_a + \frac{Mg}{S}}{(c+1)(P_a + \frac{Mg}{S})}V_i$$

したがって、

$$\begin{aligned}
\frac{V_f}{V_i} &= \frac{(c+1)P_a + \frac{cMg}{S}}{(c+1)P_a} \cdot \frac{(c+1)P_a + \frac{Mg}{S}}{(c+1)(P_a + \frac{Mg}{S})} \\
&= \frac{ct+c+1}{c+1} \cdot \frac{t+c+1}{(c+1)(t+1)} \qquad \left(\frac{Mg}{SP_a} = t(>0) \text{ とおいた}\right) \\
&= \frac{1}{(c+1)^2}\left\{c\,(t+1) + \frac{c}{t+1} + c^2 + 1\right\} \\
&\geq 1
\end{aligned}$$

が成り立ち、$t > 0$ より等号は成立しないので、$V_f > V_i$ であり、状態方程式から直ちに $T_f > T_i$ が従う。

I-6　準静的でない断熱過程 4（断熱サイクルの不存在）

圧力	体積	温度	操作
$P_i = P_{\mathrm{ex}}$	V_i	T_i	
$P_f = P'_{\mathrm{ex}}$	V_f	T_f	外圧を速やかに P'_{ex} に変えて断熱容器の中が平衡状態になるまで待った

外圧を速やかに変えると大気の容器内の気体に対しする仕事 W は

$$W = P_f(V_i - V_f)$$

である。

従って操作前の内部エネルギーを U_i、操作後の内部エネルギーを U_f とおいてやると

$$\begin{aligned} U_f &= U_i + W \\ cP_fV_f &= cP_iV_i + P_f(V_i - V_f) \\ \frac{V_f}{V_i} &= \frac{1}{c+1}\left(1 + c\frac{P_i}{P_f}\right) \end{aligned}$$

である。

したがって

$$\begin{aligned} \frac{P_fV_f^{\gamma}}{P_iV_i^{\gamma}} &= \frac{P_f}{P_i}\left(\frac{V_f}{V_i}\right)^{\gamma} \\ &= \frac{P_f}{P_i}\left\{\frac{1}{c+1}\left(1 + c\frac{P_i}{P_f}\right)\right\}^{\gamma} \\ &\geq 1 \end{aligned}$$

なお最後の不等式は $t = P_i/P_f$ とおけば、t は $(0, \infty)$ の区間を動くので、

$$f(t) = t^{-1}(1 + ct)^{\gamma}$$

という関数のこの区間での挙動を考えると、$t = 1$ で極小値 $(1 + c)^{\gamma}$ をとることより得られる。

以上より $P_fV_f^{\gamma} > P_iV_i^{\gamma}$ が示された。

I-7　準静的でない定温過程 1

大気圧は P_aで、容器内の気体はつねに温度 T_R の熱源に接している。

前半

圧力	体積	温度	操作
P_i	V_i	T_R	あらかじめ質量 M のおもりをひとつ載せてある (状態 A)
$P_f = P_a$	V_f	T_R	速やかにふたの上からおもりを取り除き平衡状態になるまで待った（状態 B）

1.

$$
\begin{aligned}
P_i &= P_a + \frac{Mg}{S} \\
V_i &= \frac{P_a V_f}{P_i} = \frac{P_a}{P_a + \frac{Mg}{S}} V_f
\end{aligned}
$$

であるから
系がおもりをとりのぞいたあと外部からされる仕事 $W_{\mathrm{ex}}^{(1)}$ は

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{ex}}^{(1)} &= P_a (V_i - V_f) \\
&= P_a V_f \left(\frac{P_a}{P_a + \frac{Mg}{S}} - 1 \right) \\
&= -P_a V_f \frac{\frac{Mg}{S}}{P_a + \frac{Mg}{S}} < 0
\end{aligned}
$$

2.
理想気体の内部エネルギーは温度に比例しているが、温度は一定なので内部エネルギーは変化しない。

3.
系が熱源から受け取る熱 $Q_{\mathrm{ex}}^{(1)}$ は、内部エネルギーが不変であることより

$$
\begin{aligned}
0 &= W_{\mathrm{ex}}^{(1)} + Q_{\mathrm{ex}}^{(1)} \\
Q_{\mathrm{ex}}^{(1)} &= -W_{\mathrm{ex}}^{(1)} \\
&= P_a V_f \frac{\frac{Mg}{S}}{P_a + \frac{Mg}{S}} > 0
\end{aligned}
$$

後半

おもりを一つ取り除いた後の状態における圧力、体積を下表のように定めておく

圧力	体積	温度	操作
P_i	V_i	T_R	あらかじめ質量 $M/2$ のおもりが二つのせてある
P_m	V_m	T_R	おもりの一つを速やかに除き平衡状態になるまで待った
$P_f = P_a$	V_f	T_R	もう一つのおもりを速やかに除き平衡状態になるまで待った

4.

$$
\begin{aligned}
P_i &= P_a + \frac{Mg}{S} \\
V_i &= \frac{P_a V_f}{P_i} = \frac{P_a}{P_a + \frac{Mg}{S}} V_f
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P_m &= P_a + \frac{Mg}{2S} \\
V_m &= \frac{P_a V_f}{P_m} = \frac{P_a}{P_a + \frac{Mg}{2S}} V_f
\end{aligned}
$$

であるから, 系がされる仕事 $W_{\mathrm{ex}}^{(2)}$ は

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{ex}}^{(2)} &= P_m(V_i - V_m) + P_f(V_m - V_f) \\
&= P_a V_f \left(\frac{P_a + \frac{Mg}{2S}}{P_a + \frac{Mg}{S}} + \frac{P_a}{P_a + \frac{Mg}{2S}} - 2 \right) \\
&= -P_a V_f \left(\frac{\frac{Mg}{2S}}{P_a + \frac{Mg}{S}} + \frac{\frac{Mg}{2S}}{P_a + \frac{Mg}{2S}} \right) < 0
\end{aligned}
$$

5.

等温過程なので系の内部エネルギーは一定だから、系が熱源から受け取る熱量は

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathrm{ex}}^{(2)} &= -W_{\mathrm{ex}}^{(2)} \\
&= P_a V_f \left(\frac{\frac{Mg}{2S}}{P_a + \frac{Mg}{S}} + \frac{\frac{Mg}{2S}}{P_a + \frac{Mg}{2S}} \right) > 0
\end{aligned}
$$

6.

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{ex}}^{(2)} - W_{\mathrm{ex}}^{(1)} &= P_a V_f \left\{ - \left(\frac{\frac{Mg}{2S}}{P_a + \frac{Mg}{S}} + \frac{\frac{Mg}{2S}}{P_a + \frac{Mg}{2S}} \right) + \frac{\frac{Mg}{S}}{P_a + \frac{Mg}{S}} \right\} \\
&= -P_a V_f \left(\frac{Mg}{2S} \right)^2 \frac{1}{(P_a + \frac{Mg}{2S})(P_a + \frac{Mg}{S})} < 0
\end{aligned}
$$

より $W_{\mathrm{ex}}^{(1)} > W_{\mathrm{ex}}^{(2)}$ がいえる。

I-8　準静的でない定温過程と等温準静的過程 1

大気圧は P_a で、容器の中の気体は熱源に触れて、温度は T_R に保たれている。

圧力	体積	温度	操作
P_i	V_i	T_R	あらかじめ質量 M/n のおもりが n 個のせてある
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	おもりの一つを速やかに除き平衡状態になるまで待つことを n 回繰り返す
$P_f = P_a$	V_f	T_R	

1.

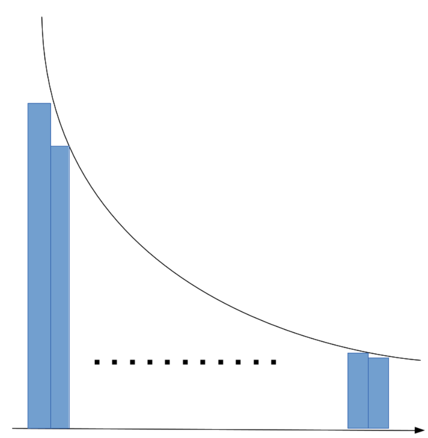
おもりが $k(0 \leq k \leq n)$ 個載っている状態での圧力 P_k と体積 V_k は,P_a と V_f で表せば、

$$
\begin{aligned}
P_k &= P_a + \frac{kMg}{nS} \\
V_k &= \frac{P_a V_f}{P_k} = \frac{P_a}{P_a + \frac{kMg}{nS}} V_f
\end{aligned}
$$

であるから,

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{ex}}^{(n)} &= \sum_{k=1}^{n} P_{k-1}(V_k - V_{k-1}) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{-\frac{Mg}{nS}}{P_a + \frac{kMg}{nS}} P_a V_f \\
&= -\frac{Mg}{S} P_a V_f \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P_a + \frac{kMg}{nS}} < 0
\end{aligned}
$$

2.



$$
\int_0^1 \frac{dx}{P_a + \frac{Mg}{S}x}
$$

の値を区間 $[0,1]$ を n 等分して、矩形の面積の和で下から近似することを考えれば、n 等分したときの下側の矩形の面積の和が

$$
\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{P_a + \frac{kMg}{nS}}
$$

と等しく、これは分点を増やせば単調に増加することより、$W_{\mathrm{ex}}^{(n)}$ は n について単調に減少することがわかる。

I-9　準静的でない定温サイクル 1（1 温度熱機関の不存在）

大気圧をは P_a で、容器中の気体は熱源に触れていて、温度は T_R に保たれている。

圧力	体積	温度	操作
P_i	V_i	T_R	あらかじめ質量 M のおもりがひとつ蓋の上にのせてある
$P_m = P_a$	V_m	T_R	おもりのを速やかに除き平衡状態になるまで待った
P_f	V_f	T_R	質量 M のおもりをふたたび蓋の上にのせて平衡状態になるまで待った

1.

釣り合いと状態方程式を考えることで

$$P_i = P_f = P_a + \frac{Mg}{S}$$
$$V_i = V_f$$

が得られ、明らかに $V_m > V_i$ から、系がされる仕事 W_{ex} は

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{ex}} &= P_m(V_i - V_m) + P_f(V_m - V_f) \\ &= \frac{Mg}{S}(V_m - V_i) > 0 \end{aligned}$$

2.

内部エネルギーは温度が一定なので変化しない。

3.

内部エネルギーが一定であることより

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{ex}} &= -W_{\mathrm{ex}} \\ &= -\frac{Mg}{S}(V_m - V_i) < 0 \end{aligned}$$

I-10　準静的でない定温サイクル 2（1 温度熱機関の不存在）

圧力	体積	温度	操作
$P_i = P_a$	V_i	T_R	
P_m	V_m	T_R	質量 M のおもりを蓋の上にのせて平衡状態になるまで待った
P_a	V_f	T_R	おもりを蓋の上から速やかに除き平衡状態になるまで待った

1.

釣り合いを考えて、

$$P_m = P_a + \frac{Mg}{S}$$

であるから、系がされる仕事は、$V_i = V_f > V_m$ が明らかになりたつことより

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{ex}} &= P_m(V_i - V_m) + P_a(V_m - V_f) \\ &= \frac{Mg}{S}(V_i - V_m) > 0 \end{aligned}$$

2.

気体の内部エネルギーは不変だから, 熱源の与えるエネルギーは

$$
\begin{aligned}
Q_{\mathrm{ex}} &= -W_{\mathrm{ex}} \\
&= -\frac{Mg}{S}(V_i - V_m) < 0
\end{aligned}
$$

I-11　準静的でない定温サイクル 3(1 温度熱機関の不存在)

下表のように各平衡状態における圧力、体積を定めておく。容器内部の理想気体はつねに温度が T_R に保たれている。

圧力	体積	温度	操作
$P_0(=P_{\mathrm{ex},0}$とする$)$	$V_{\mathrm{i}}(=V_0$とする$)$	T_{R}	
$P_{\mathrm{ex},1}$	V_1	T_{R}	外圧を $P_{\mathrm{ex},1}$ に変えて平衡状態になるまで待った
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{\mathrm{ex},k}$	V_k	T_{R}	外圧を $P_{\mathrm{ex},k}$ に変えて平衡状態になるまで待った
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$P_{\mathrm{ex},n-1}$	V_{n-1}	T_{R}	外圧を $P_{\mathrm{ex},n-1}$ に変えて平衡状態になるまで待った
$P_{\mathrm{ex},n}=P_0$	$V_n=V_i$	T_{R}	外圧を $P_{\mathrm{ex},n}$ に変えて平衡状態になるまで待った

系が外力になされる仕事 W_{ex} は、

$$
V_k = \frac{P_0 V_0}{P_{\mathrm{ex},k}}
$$

より

$$
\begin{aligned}
W_{\mathrm{ex}} &= \sum_{k=1}^{n} P_{\mathrm{ex},k}(V_{k-1} - V_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P_0 V_0 \left(\frac{P_{\mathrm{ex},k}}{P_{\mathrm{ex},\ k-1}} - 1 \right) \\
&= P_0 V_0 \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{P_{\mathrm{ex},k}}{P_{\mathrm{ex},k-1}} - n \right) \\
&\geq n P_0 V_0 \left\{ \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{P_{\mathrm{ex},k}}{P_{\mathrm{ex},k-1}} \right)^{1/n} - 1 \right\} = 0 \quad \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{P_{\mathrm{ex},k}}{P_{\mathrm{ex},k-1}} = 1 \text{ のため} \right)
\end{aligned}
$$

が成り立つ。等号が成立するならば、圧力一定ということになるので、外力によってなされる仕事は正である。

I-12　等温準静的サイクル

理想気体の準静的な等温サイクルは I-11 で考えた過程の極限 ($n \to \infty$) によって与えられるので、外力によって与えられる仕事は正または 0 となる。準静的過程は可逆であり、逆過程を考えても同じように外力の与える仕事は正または 0 だから、理想気体の準静的等温サイクルにおいて外力の与える仕事は 0 となる。