

I-1 準静的でない断熱過程 1

答えのみ

1. $P_i = P_a + \frac{Mg}{S}$
2. $-P_f(V_f^{(1)} - V_i)$
3. 状態 A の方が $P_f(V_f^{(1)} - V_i)$ だけ大きい
4. $V_f^{(1)} = \frac{1}{c+1} \left(1 + \frac{cP_i}{P_f}\right) V_i$
5. $V_f^{(2)} = \frac{1}{(c+1)^2} \left(1 + c \frac{P_i+P_f}{2P_f}\right) \left(1 + \frac{2cP_i}{P_i+P_f}\right) V_i$
6. $V_f^{(1)} > V_f^{(2)}$
 (proof : $V_f^{(1)} - V_f^{(2)} = \frac{cV_i}{(c+1)^2} \frac{(P_i-P_f)^2}{2P_f(P_i+P_f)} > 0$ より)
7. $T_f^{(1)} > T_f^{(2)}$

I-2 断熱曲線の導出

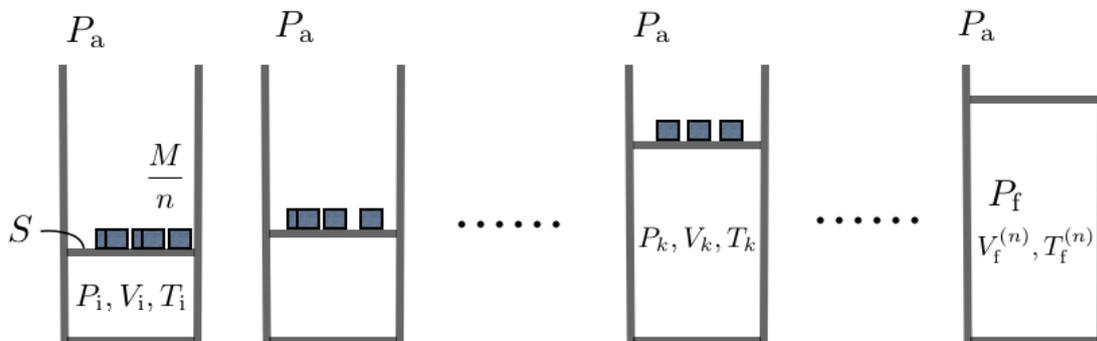


図 1: 準静的な断熱過程

1. k 回目 ($k = 0 \sim n-1$) の操作後の平衡状態から、 $k+1$ 回目の操作を行って平衡状態になるまでに大気圧がした仕事は

$$W_{\text{ex}}^{k \rightarrow k+1} = -P_{k+1}(V_{k+1} - V_k) \quad (1)$$

である。また、この操作での内部エネルギーの変化は

$$\Delta U^{k \rightarrow k+1} = c(P_{k+1}V_{k+1} - P_kV_k) \quad (2)$$

である。断熱過程なので

$$W_{\text{ex}}^{k \rightarrow k+1} = \Delta U^{k \rightarrow k+1} \quad (3)$$

が成り立ち、

$$-P_{k+1}V_{k+1} - P_{k+1}V_k = cP_{k+1}V_{k+1} - cP_kV_k \quad (4)$$

を得る。両辺 $P_{k+1}V_k$ で割って、整理すると

$$\begin{aligned} -\frac{V_{k+1}}{V_k} + 1 &= c\frac{V_{k+1}}{V_k} - c\frac{P_k}{P_{k+1}} \\ \Rightarrow \frac{P_k}{P_{k+1}} &= \frac{1+c}{c}\frac{V_{k+1}}{V_k} - \frac{1}{c} \\ \Rightarrow \frac{P_k}{P_{k+1}} - 1 &= \frac{1+c}{c}\frac{V_{k+1}}{V_k} - \frac{1}{c} - 1 \end{aligned}$$

$\gamma = (c+1)/c$ を用いれば、

$$\frac{P_k}{P_{k+1}} - 1 = \gamma \left(\frac{V_{k+1}}{V_k} - 1 \right), \quad k = 0 \sim n-1 \quad (5)$$

を得る。(証明終わり)

2. $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k$ 、 $\Delta V_k = V_{k+1} - V_k$ とおき、(5)の両辺を k について 0 から $n-1$ まで和をとると

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta P_k}{P_{k+1}} = -\gamma \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta V_k}{V_k} \quad (6)$$

が得られる。この両辺で $n \rightarrow \infty$ の極限をとると、 $\Delta P_k \rightarrow 0$ 、 $\Delta V_k \rightarrow 0$ であるから、

$$\lim_{\Delta P_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta P_k}{P_{k+1}} = -\gamma \lim_{\Delta V_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta V_k}{V_k} \quad (7)$$

と書ける。区分別積法

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \quad (8)$$

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \quad (9)$$

を用いると

$$\int_{P_i}^{P_f} \frac{1}{P} dP = \int_{V_i}^{V_f^{(\infty)}} \frac{1}{V} dV \quad (10)$$

が得られ、積分を実行すると

$$\frac{P_f}{P_i} = \left(\frac{V_f^{(\infty)}}{V_i} \right)^{-\gamma} \quad (11)$$

となる。(証明終わり)

I-3 準静的でない断熱過程と断熱準静的過程の比較

1. (11) より

$$V_f^{(\infty)} = \left(\frac{P_f}{P_i} \right)^{-\frac{1}{\gamma}} V_i = \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1}{\gamma}} V_i \quad (12)$$

また、I-1 より

$$\begin{aligned} V_f^{(1)} &= \frac{1}{c+1} \left(1 + \frac{cP_i}{P_f} \right) V_i \\ &= \left(\frac{1}{c+1} + \frac{c}{c+1} \frac{P_i}{P_f} \right) V_i \\ &= \left(1 - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \frac{P_i}{P_f} \right) V_i \\ &= \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_i}{P_f} - 1 \right) + 1 \right] V_i \end{aligned} \quad (13)$$

であるから、

$$V_f^{(1)} - V_f^{(\infty)} = \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_i}{P_f} - 1 \right) + 1 - \left(\frac{P_i}{P_f} \right)^{\frac{1}{\gamma}} \right] V_i \quad (14)$$

を得る。ここで、例えば

- 単原子分子の場合： $c = \frac{3}{2}, \gamma = \frac{5}{3}$
- 二原子分子の場合： $c = \frac{5}{2}, \gamma = \frac{7}{3}$
- ⋮

であり、一般に $0 < \frac{1}{\gamma} < 1$ が成り立つ。一方、

$$\frac{P_i}{P_f} = \frac{P_a + \frac{Mg}{S}}{P_a} > 1 \quad (15)$$

である。 $1/\gamma \equiv \alpha, P_i/P_f \equiv x$ とおくと、

$$V_f^{(1)} - V_f^{(\infty)} = \alpha(x-1) + 1 - x^\alpha, \quad 0 < \alpha < 1, \quad x > 1 \quad (16)$$

と書ける。 $f(x) \equiv \alpha(x-1) + 1 - x^\alpha$ とおくと、

$$f(1) = 0 \quad (17)$$

また、

$$\frac{df(x)}{dx} = \alpha - \alpha x^{\alpha-1} = \alpha(1 - x^{\alpha-1}) > 0, \quad 0 < \alpha < 1, x > 1 \quad (18)$$

であるから、

$$V_f^{(1)} - V_f^{(\infty)} = f(x) > 0 \quad (19)$$

が成り立っている。ゆえに

$$V_f^{(1)} > V_f^{(\infty)} \quad (20)$$

である。

2. 理想気体の状態方程式 $PV = NRT$ より、圧力 P が一定のとき、 $V \propto T$ である。 $P_f^{(1)} = P_f^{(\infty)} = P_a$, $V_f^{(1)} > V_f^{(\infty)}$ であることを考えると

$$T_f^{(1)} > T_f^{(\infty)} \quad (21)$$

となる。

I-4 準静的でない断熱過程 2

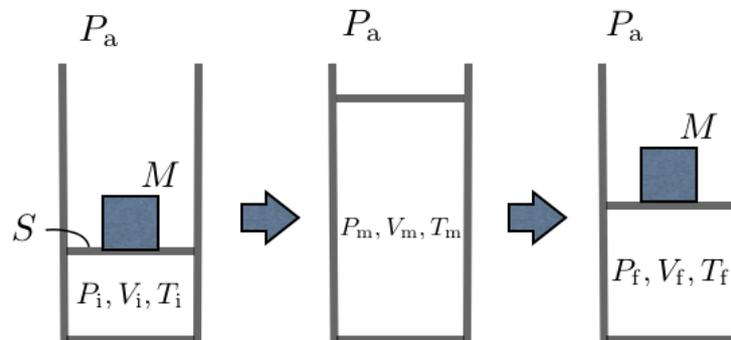


図 2: 準静的でない断熱過程

圧力 P_m , 体積 V_m , 温度 T_m の平衡状態になったとき、体積 V_m は

$$V_m = \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_i}{P_m} - 1 \right) + 1 \right] V_i \quad (22)$$

である。これを用いると、終わりの状態の体積 V_f は

$$\begin{aligned} V_f &= \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_m}{P_f} - 1 \right) + 1 \right] V_m \\ &= \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_m}{P_f} - 1 \right) + 1 \right] \left[\frac{1}{\gamma} \left(\frac{P_i}{P_m} - 1 \right) + 1 \right] V_i \end{aligned} \quad (23)$$

と書ける。ここで、 $P_m/P_f \equiv x$ ($0 < x < 1$) とおいても $P_i/P_m \equiv x$ ($1 < x$) とおいても (23) は

$$V_f = f(x)V_i \quad (24)$$

$$f(x) \equiv [\alpha(x-1) + 1] \left[\alpha \left(\frac{1}{x} - 1 \right) + 1 \right], \quad \alpha \equiv \frac{1}{\gamma}, \quad 0 < \alpha < 1 \quad (25)$$

と表すことができる。 $df(x)/dx = 0$ となるのは $x = 1$ のときで、 $f(1) = 1$ である。また、 $x > 0$ のとき $d^2f(x)/dx^2 > 0$ であるから、 $f(x)$ は $x = 1$ で極小をとり、 $x > 0$ のとき $f(x) > 1$ となる (図3)。ゆえに、

$$V_f > V_i \quad (26)$$

となり、蓋ははじめの状態より高くなる。また、 $P_f = P_i$ より $T_f > T_i$ となり、温度も高くなる。

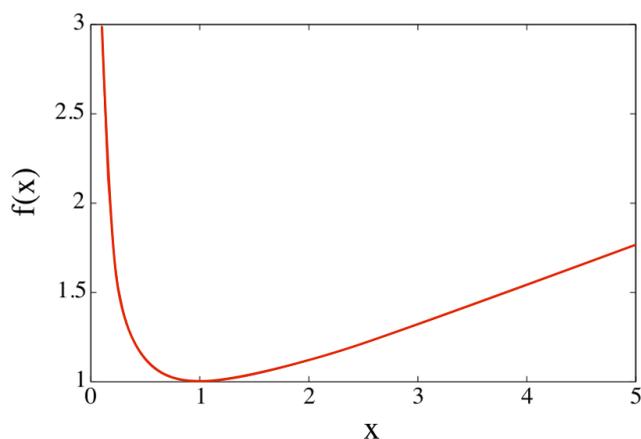


図3: $f(x) \equiv [\alpha(x-1) + 1] [\alpha(\frac{1}{x} - 1) + 1]$ のグラフ