

2013 年度夏学期 熱力学 (担当: 加藤雄介) 演習問題 I 2013.05.07

以下の設問で必要があれば重力加速度を g とせよ。また理想気体の内部エネルギーは $U = cNRT = cPV$ で与えられる (N はモル数、 R は気体定数) ことを用いてよい。

I-1 準静的でない断熱過程 1 大気圧 P_a の大気下に、断面積 S の柱状の断熱容器がある。質量が無視できるほど軽く、かつ鉛直方向になめらかに動く断熱蓋 (ふた) の上には、質量 M のおもりがひとつ載せてある。容器の内部には、その中に理想気体が入っており、圧力 P_i 、体積 V_i 、温度 T_i の平衡状態 (これを状態 A と呼ぶ) にある。

この状態から蓋の上のおもりを速やかに取り除くと、蓋が上方に移動し、しばらくして容器内部の理想気体は再び平衡状態 (これを状態 B と呼ぶ) に達した。そのときの気体の圧力は $P_f = P_a$ であり、体積、温度はそれぞれ $V_f^{(1)}$ 、 $T_f^{(1)}$ であった。

1. P_i を P_a , M , g , S を用いて表せ。
2. 状態 A から状態 B の間までの過程で大気圧がした仕事を P_f , V_i , $V_f^{(1)}$ を用いて表せ。
3. 状態 A と状態 B ではどちらがどれだけ内部エネルギーが大きいか。
4. $V_f^{(1)}$ を P_i , P_f , V_i を用いて表せ。

大気圧 P_a の大気下に、同じ断熱容器、断熱蓋を用意し、理想気体を閉じ込める。ただし、断熱蓋 (ふた) の上には、質量 $M/2$ のおもりが二つ載せてある。容器の内部の単原子分子理想気体は圧力 P_i 、体積 V_i 、温度 T_i の平衡状態にある。この状態からおもりの一つを速やかに取り除くと、蓋が上方に移動し、しばらくして容器内部の理想気体が平衡状態に達した。その状態からさらに残りのおもりを取り除くと、蓋が再び上方に移動し、しばらくすると容器内部の理想気体は平衡状態 (これを状態 B') に達した。このときの気体の圧力は $P_f = P_a$ であり、体積、温度はそれぞれ $V_f^{(2)}$ 、 $T_f^{(2)}$ であった。

5. $V_f^{(2)}$ を P_i , P_f , V_i を用いて表せ。
6. $V_f^{(1)}$ と $V_f^{(2)}$ ではどちらが大きいか。
7. B と B' ではどちらが温度が高いか ($T_f^{(1)}$ と $T_f^{(2)}$ の大小関係)。

I-2 断熱曲線の導出 大気圧 P_a の大気下に、前問 (I-1) と同じ断熱容器、断熱蓋、理想気体を用意する。ただし、断熱蓋 (ふた) の上には、質量 M/n のおもりが n 個載せてある (n は正の整数)。容器の内部の理想気体は圧力 P_i 、体積 V_i 、温度 T_i の平衡状態にある。以下の操作

- おもりの一つを速やかに取り除き、
- しばらくして容器内部の理想気体が平衡状態に達するのを待つ。

を k 回繰り返す。 n 回操作後、容器内部の理想気体は圧力 P_f 、体積 $V_f^{(n)}$ 、温度 $T_f^{(n)}$ の平衡状態に達した。 k 回目 ($k = 1 \sim n$) の操作後の平衡状態における理想気体の圧力、体積を P_k , V_k とする ($P_n = P_f$, $V_n = V_f^{(n)}$)。また $P_0 = P_i$, $V_0 = V_i$ とおく。

1. $\gamma = (c + 1)/c$ として

$$\frac{P_k}{P_{k+1}} - 1 = \gamma \left(\frac{V_{k+1}}{V_k} - 1 \right), \quad k = 0 \sim n-1 \quad (1)$$

を導け。

2. $\Delta P_k = P_{k+1} - P_k$, $\Delta V_k = V_{k+1} - V_k$ とおくと、(1) は

$$\frac{\Delta P_k}{P_{k+1}} = -\gamma \frac{\Delta V_k}{V_k}, \quad k = 0 \sim n-1 \quad (2)$$

と書き換えられる。これを k について 0 から $n-1$ まで和をとると

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta P_k}{P_{k+1}} = -\gamma \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta V_k}{V_k} \quad (3)$$

が得られる。この両辺で $n \rightarrow \infty$ の極限をとり、区分別積法*(以下の補足説明参照)を用いて、断熱曲線

$$\frac{P_f}{P_i} = \left(\frac{V_f^{(\infty)}}{V_i} \right)^{-\gamma} \quad (4)$$

を導け。

補足説明 区分別積法：

$$x_0(=a) < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n(=b)$$

または

$$x_0(=a) > x_1 > x_2 > \cdots > x_{n-1} > x_n(=b)$$

となる $\{x_k\}_{k=0}^{n-1}$ において $n \rightarrow \infty$ かつ $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ がどの $k \in [0, n-1]$ に対してもゼロに収束する極限を $\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0}$ と表す。 $x \in [a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \quad (5)$$

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_{k+1}) \Delta x_k = \int_a^b f(x) dx \quad (6)$$

が成り立つ。これらの関係式を用いて数列和の極限を積分を用いて評価する方法をここでは区分別積法と呼んでいる。

注： $\Delta x_k = \frac{b-a}{n} (\equiv \Delta x)$, $x_k = x_0 + (k-1)\Delta x$ であれば既習の内容のはず。分割区間の幅 $|\Delta x_k|$ が不揃い (k に依存するということ) である場合でも $\sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b-a$, かつ $|\Delta x_k| \rightarrow 0$ であれば、これまでに習ってきた区分別積法と同様な手法を用いることができる。

I-3 準静的でない断熱過程と断熱準静的過程の比較

1. (I-2)の $V_f^{(\infty)}$ と (I-1)の $V_f^{(1)}$ ではどちらが大きいか。

ヒント： $0 < \alpha < 1$, $x > 1$ のとき、 $\alpha(x-1) + 1 - x^\alpha > 0$ を示して用いればよい。

2. (I-2)の $T_f^{(\infty)}$ と (I-1)の $T_f^{(1)}$ の大小関係を答えよ。またその根拠を示せ。

I-4 準静的でない断熱過程 2 大気圧 P_a の大気下に、断面積 S の柱状の断熱容器がある。質量が無視できるほど軽く、かつ鉛直方向になめらかに動く断熱蓋（ふた）の上には、質量 M のおもりがひとつ載せてある。容器の内部には、その中に理想気体が入っており、圧力 P_i 、体積 V_i 、温度 T_i の平衡状態にある。

この状態から蓋の上のおもりを速やかに取り除くと、蓋が上方に移動し、しばらくして容器内部の理想気体は再び平衡状態に達した。そのときの気体の圧力は $P_m = P_a$ であり、体積、温度はそれぞれ V_m 、 T_m であった。

この状態から、質量 M のおもりを断熱蓋の上におくと、蓋は下方に移動し、しばらくして容器内部の理想気体は再び平衡状態に達した。そのときの気体の圧力は $P_f = P_i$ であり、体積、温度はそれぞれ V_f 、 T_f であった。

V_i と V_f の大小関係を答えよ（はじめの状態に比べて、終わりの状態における蓋の位置は高いか低い）。また T_i と T_f の大小関係を答えよ（はじめの状態に比べて、終わりの状態における温度は高いか低い）。それらの根拠を示せ。