

## 2014 年度 力学 B (担当: 加藤雄介) レポート I 解答例

文責: 黒澤範行

2014 年 7 月 28 日

### 問題 I-8

初速  $0.00 \text{ m/s}$  でスタートし、加速度  $g$  で  $100 \text{ m}$  落下する時間  $t$  は

$$\frac{1}{2}gt^2 = 100 \text{ m} \quad (1)$$

と書けるから  $t = 4.52 \text{ s}$  である。地面と平行方向の速度は

$$350 \text{ km/h} = 350 \times 10^3 \text{ m} \times (3600 \text{ s})^{-1} = 97.2 \text{ m/s} \quad (2)$$

であるから横方向への移動距離は

$$97.2 \text{ m/s} \times 4.52 \text{ s} = 4.39 \times 10^2 \text{ m} \quad (3)$$

である。また着地する瞬間の速度の、地面との垂直成分は

$$9.80 \text{ m/s}^2 \times 4.52 \text{ s} = 44.3 \text{ m/s} \quad (4)$$

であり、水平成分は  $97.2 \text{ m/s}$  である。

### 参考: 単位の換算

単位を換算する際には、単位をただの常数だと思って計算すると分かりやすいと思います。例えば、問 8-I の解答例では、 $350 \text{ km/h}$  を  $\text{m/s}$  に換算する際に、 $\text{km}$  および  $\text{h}$  をただの常数だと思って、 $350 \text{ km/h}$  に  $\text{km} = 1000 \text{ m}$ 、 $\text{h} = 3600 \text{ s}$  を代入して  $\text{km/h}$  を  $\text{m/s}$  に変換しています。理論物理では、単位として通常のメートルや秒のかわりに物理常数である真空中の光速  $c$  やプランク常数  $\hbar$  を単位として用いることがしばしば行なわれます。このような場合の計算を考えると分かりやすいかもしれません。(1 秒や 1 メートルを特殊な“物理常数”とみなしてみましょう。)

### 問題 I-9

考える運動は半径  $r$  の等速円運動だから、時刻  $t$  での位置  $\boldsymbol{x}$  は円運動の中心を座標の原点にとれば (初期時刻を適当に調節して)

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix} \quad (5)$$

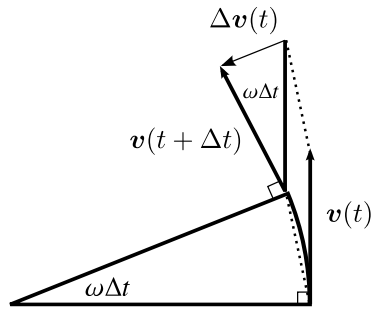


図1 回転時の速度と加速度

と書くことができる。ただし周期を  $T$  としたとき角速度  $\omega = 2\pi/T$  である。速度  $v$  および加速度  $a$  は

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega \sin(\omega t) \\ r\omega \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \begin{pmatrix} -r\omega^2 \cos(\omega t) \\ -r\omega^2 \sin(\omega t) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

よって速さの大きさ  $v$  は  $r$  と  $\omega$  を用いて

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{r^2\omega^2 \sin^2(\omega t) + r^2\omega^2 \cos^2(\omega t)} = r\omega \quad (8)$$

また加速度の大きさ  $a$  は

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{r^2\omega^4 \cos^2(\omega t) + r^2\omega^4 \sin^2(\omega t)} = r\omega^2 \quad (9)$$

と書くことができる。よって  $a$  は  $r$  と  $v$  を用いて

$$a = r\omega^2 = v^2/r \quad (10)$$

と書くことができる。

### 参考: 式の意味

式 (6) より、任意の時刻  $t$  で  $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0$  であることが分かります。つまり速度は円運動の中心を原点とした位置ベクトルに直交します。また (7) より  $\mathbf{a} = -\omega^2 \mathbf{x}$  であり、つまり加速度は円運動の中心を向いています。この加速度に比例する力は向心力と呼ばれます。また、これらの式を図に書くと図1になります。時刻  $t$  から  $t + \Delta t$  での速度の変化を  $\Delta v(t)$  としたとき、加速度の大きさ  $a(t)$  は、 $\Delta t$  が十分に小さい時には

$$a(t) \simeq \frac{\Delta v(t)}{\Delta t} \simeq \frac{v\omega\Delta t}{\Delta t} = v\omega \quad (11)$$

となっていることが分かります。上記は雰囲気だけの議論ですが、ちゃんと行なうと三角関数の微分公式の証明になります。

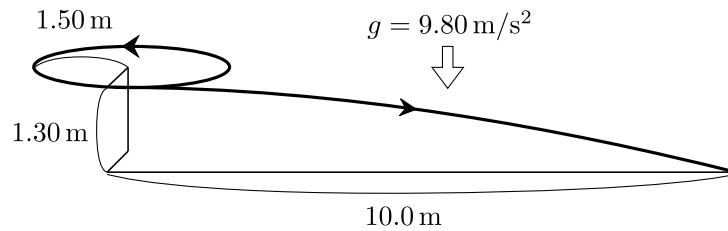


図2 回転による投石

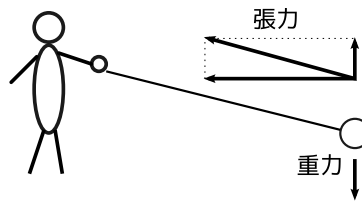


図3 重力と回転

## 問題 I-10

ひもが切れた後を考えると、石にかかっている力は重力のみであるから問題 I-8 と同じ状況である (図 2)。問題 I-8 と同様に、落下するのにかかる時間を  $t$  とすると加速度の大きさを  $g$  として  $gt^2/2 = 1.30 \text{ m}$  と書けるから  $t = 0.515 \text{ s}$  である。よって地面と水平方向の速度 (ひもが切れた時の速度) の大きさは

$$\frac{10.0 \text{ m}}{0.515 \text{ s}} = 19.4 \text{ m/s} \quad (12)$$

である。円運動の半径すなわちひもの長さは  $1.50 \text{ m}$  であるから、問題 9 より円運動中の加速度の大きさ  $a$  は

$$a = \frac{(19.4 \text{ m/s})^2}{1.50 \text{ m}} = 2.51 \times 10^2 \text{ m/s}^2 \quad (13)$$

である。

### 重力を無視してよいこと

加速度を求める際に重力を無視していいのかという質問がありました。重力加速度は  $9.80 \text{ m/s}^2$  で円運動の加速度は  $2.51 \times 10^2 \text{ m/s}^2$  ですから、ここだけ見ると無視できないように見えます。しかしもし下向きの加速度が存在していれば石は下向きの速度を持ってしまい、時間が経てばそのまま地面に落ちてしまいますから、下向きの加速度はゼロのはずです。実際の場合を考えてみると、図 3 のように斜め上向きの張力の中の上向き成分が重力と打ち消しあい、上下方向の正味の加速度はゼロとなっていると考えられます。(水平面内の加速度は、円運動しているため常に上で求めた向心加速度がかかっています。)

## 問題 I-11

1.

力の重ね合わせの法則より、人が棒から受ける力は鉛直上向きに

$$g \times 63.0 \text{ kg} - 3.00 \text{ m/s}^2 \times 63.0 \text{ kg} = 4.28 \times 10^2 \text{ kg m/s}^2。$$

2.

反作用の法則より、棒が人から受ける力は鉛直下向きに  $4.28 \times 10^2 \text{ kg m/s}^2$ 。

### 補足

問題の設定を考えると、人が垂直な棒に掴まって滑り落ちている状況だと考えられます。このとき人が受けている上向きの力は摩擦力ですから、棒と人との間には垂直効力が働いています。この垂直効力は手や足が棒を握りしめたり挟みこんだりする力、あるいはその反作用になります。(ただし本当に摩擦力かどうかは問題文からは分からないので、題意としては上の解になります。) この力の向きは手の平から棒の中心に向かって垂直方向です。

## 問題 I-12

1.

時刻  $t = 0$  で動き出したパックが時刻  $t = T$  で停止したとする。動摩擦係数が一定だとすると摩擦によって受ける力は一定だから加速度の大きさ  $a$  も一定である。パックの初速を  $v_0$  とすると、時刻  $T$  で停止するからパックの加速度の大きさは  $a = v_0/T$  である。この時パックが移動した距離  $r$  は

$$\begin{aligned} r &= \int_0^T (v_0 - at) dt \\ &= \left[ v_0 t - \frac{a}{2} t^2 \right]_{t=0}^T \\ &= \frac{v_0 T}{2} \end{aligned} \tag{14}$$

であり、よって  $a$  を  $r$  と  $v_0$  で表わすと  $a = v_0^2/(2r)$  である。摩擦力の大きさはパックの重さを  $m$  とすると  $ma$  であるから、上式および具体的な値を代入すると

$$ma = \frac{mv_0^2}{2r} = \frac{110 \text{ g} \times 5.00 \text{ ms}^{-1} \times 5.00 \text{ ms}^{-1}}{2 \times 20.0 \text{ m}} = 6.88 \times 10^{-2} \text{ kg ms}^{-2} \tag{15}$$

が得られる。

2.

垂直抗力の大きさは  $mg$  だからから動摩擦係数の大きさ  $\mu$  は

$$\mu = \frac{ma}{mg} = \frac{v_0^2}{2rg} = \frac{5.00 \text{ m s}^{-1} \times 5.00 \text{ m s}^{-1}}{2 \times 20.0 \text{ m} \times 9.80 \text{ m s}^{-2}} = 6.38 \times 10^{-2} \quad (16)$$

である。