力学B 演習問題I 解答例 2013.06.14（TA:越田)

I-1 直線運動　時間を t，そのときの車の位置を $x(t)$ で表す．車の加速度を a として，微分方程式

$$\ddot{x}(t) = a \tag{1}$$

を解けばよい．この微分方程式の一般解は b, c を定数として，

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + bt + c \tag{2}$$

である．問題文で与えられた条件から定数 a, b, c を決めれば，車の運動が完全に決定される．まず，時刻 $t = 0$ では速度が 0 であるので，

$$\dot{x}(0) = b = 0 \tag{3}$$

と決定される．さらに与えられている条件は 2 地点 (地点 1 と地点 2) の間の距離 (L とおく;$L = 60.0$ m)，2 地点を通過するのに要した時間 (T とおく;$T = 6.0$ 秒)，地点 2 を通過したときの速度 (V とおく;$V = 15.0$ m/s) である．ここで，座標の原点は任意に決めてよいので，地点 1 を座標の原点にとることにする．すなわち，地点 1 を通過した時刻を t_1 とおけば，

$$x(t_1) = \frac{a}{2}t_1^2 + c = 0 \tag{4}$$

が成り立つ．このように座標の原点を選んでおくと，地点 2 の座標は L になる．時刻 $t_1 + T$ では車は L にいるのだから，

$$x(t_1 + T) = \frac{a}{2}(t_1 + T)^2 + c = L \tag{5}$$

が成り立つ．さらに地点 2 を通過したときの速度が V であるから，

$$\dot{x}(t_1 + T) = a(t_1 + T) = V \tag{6}$$

が成り立つ．式 (4),(5),(6) を a, t_1, c について解くと，

$$a = \frac{2}{T^2}(VT - L) \tag{7}$$

$$t_1 = T\frac{2L - VT}{2(VT - L)} \tag{8}$$

$$c = -\frac{(2L - VT)^2}{4(VT - L)} \tag{9}$$

を得る．

あとは $L = 60.0$ m, $T = 6.0$ 秒, $V = 15.0$ m/s を代入すれば問題の答えが出る．

1. 第 1 地点を通過したときの速度は

$$\dot{x}(t_1) = at_1 = \frac{2L}{T} - V = 5.0 \text{ m/s}. \tag{10}$$

2. 加速度は

$$a = 1.67 \text{ m/s}^2. \tag{11}$$

3. 速度が 0 のときの車の位置は

$$x(0) = c = -7.5 \text{ m} \tag{12}$$

である．地点 1 を座標の原点にとったから，車が止まっていたのは地点 1 から 7.5 m 離れた地点である．

4.

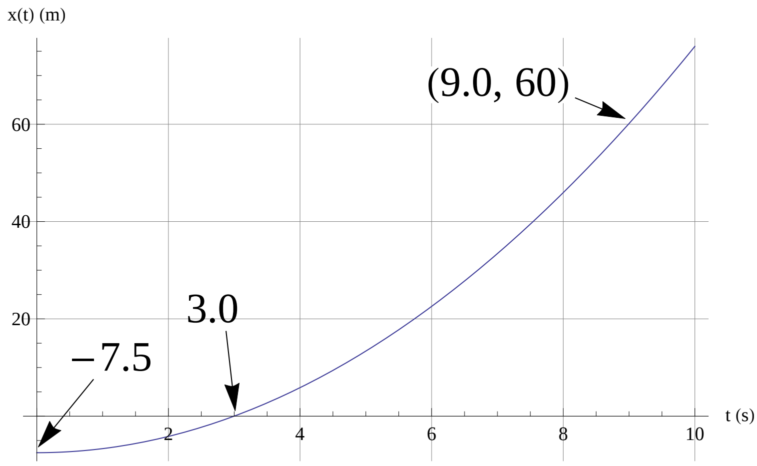

図 1　位置 $x(t)$.

5.

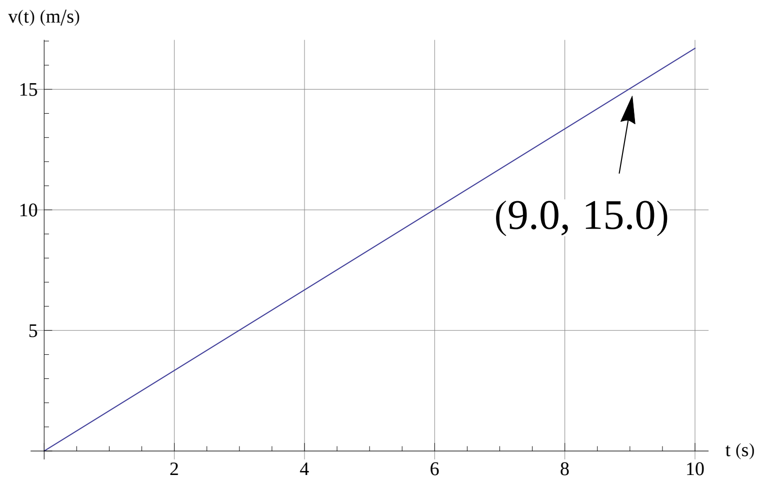

図 2　速度 $v(t)$.

I-2 直線運動　時間を t で表し，鉛直上方向を正にとる座標系でボールの高さを $y(t)$ で表す．ボールの質量を m，重力加速度を $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ とすると，ボールの運動を記述する運動方程式は，

$$m\ddot{y}(t) = -mg \tag{13}$$

である．一般解は，b, c を定数として，

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + bt + c \tag{14}$$

と表される．ボールを投げた時刻を $t = 0$ とすれば，$y(0) = c = 0$ となる．$y(t)$ を平方完成により変形して，

$$y(t) = -\frac{g}{2}\left(t - \frac{b}{g}\right)^2 + \frac{b^2}{2g} \tag{15}$$

と表せば，ボールは時刻 $t = b/g$ に最高到達点 $b^2/2g$ に達する放物運動をすることが分かる．最高到達点を $h(; h = 50\ \mathrm{m})$ とおけば，定数 b が h を用いて表せる．ただし，ボールが最高到達点に達する時刻は正であるべきなので $b > 0$ である．したがって，

$$b = \sqrt{2gh} \tag{16}$$

である．

1. 初速度は

$$\dot{y}(0) = b = \sqrt{2gh} = 31.3\ \mathrm{m/s} \tag{17}$$

である．

2. $y(t)$ は $t = b/g$ に関して左右対称なので，投げ上げてから落ちるまでにかかる時間は

$$2\frac{b}{g} = 2\frac{\sqrt{2gh}}{g} = \sqrt{8\frac{h}{g}} = 6.39\ \text{秒} \tag{18}$$

である．

3.

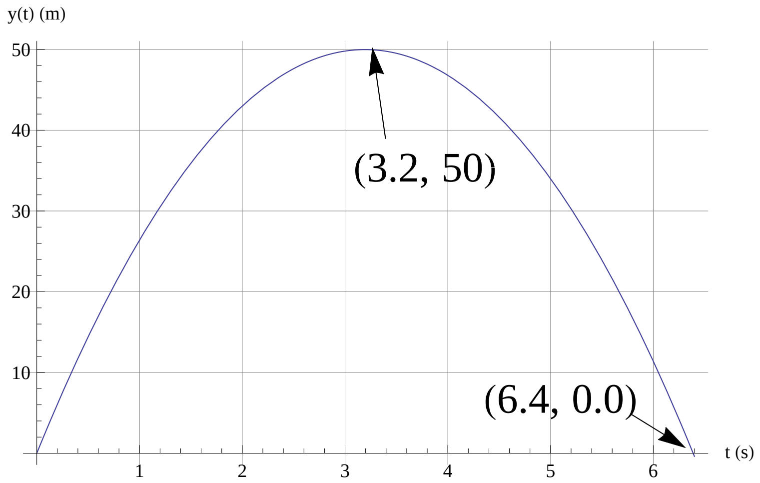

図 3　高さ $y(t)$.

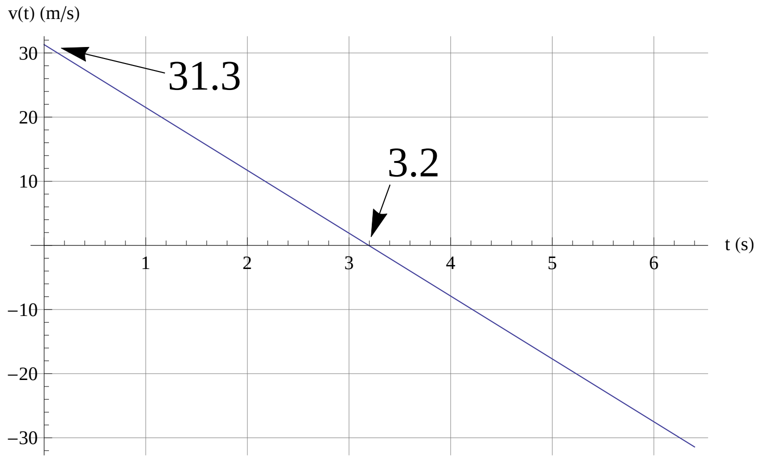

図 4　速度 $v(t)$.

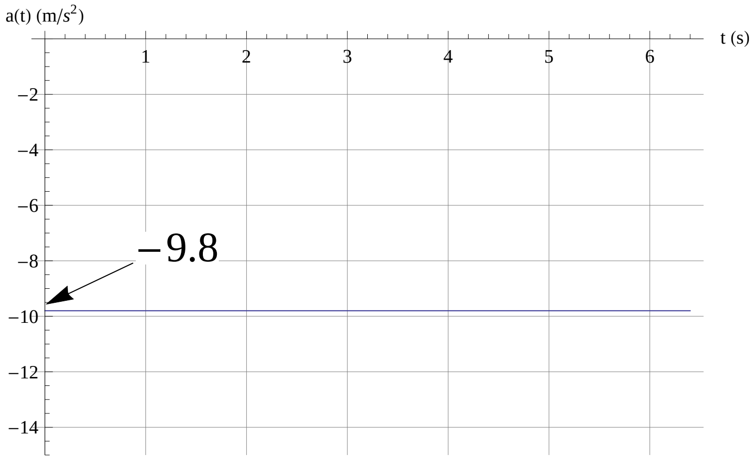

図 5　加速度 $a(t)$.

I-3 放物運動　2 次元平面上でのボールの運動を考える．水平方向に x 軸，鉛直上向きに y 軸をとることにする．ただし，ボールが打たれた地点を原点にとる．時間を t で表し，ボールの位置を $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t))$ で表すと，$x(t), y(t)$ が従う方程式は重力加速度を $g = 9.8\mathrm{m/s^2}$ として，

$$\ddot{x}(t) = 0 \qquad \ddot{y}(t) = -g \tag{19}$$

である．一般解はそれぞれ，定数 x_0, x_1, y_0, y_1 を用いて，

$$x(t) = x_1 t + x_0 \tag{20}$$

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + y_1 t + y_0 \tag{21}$$

である．$x(0) = y(0) = 0$ より，$x_0 = y_0 = 0$ である．またボールは角度 45 度で打ち出されたことから，$x_1 = y_1$ である．この定数を v_0 とおくと，$x(t), y(t)$ は

$$x(t) = v_0 t \tag{22}$$

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t \tag{23}$$

と書かれる．この 2 式から t を消去することで 2 次元平面上でのボールの軌跡が得られる．すなわち，

$$y = -\frac{g}{2v_0^2}x^2 + x \tag{24}$$

を得る．$y = 0$ とすると 2 つの解 $x = 0,\ 2v_0^2/g$ が得られるが，このうち $x = 2v_0^2/g$ は水平飛距離 (L とする;$L = 107$ m) を与える:

$$\frac{2v_0^2}{g} = L \ \ \rightarrow \ \ v_0 = \sqrt{\frac{gL}{2}} \tag{25}$$

したがって，ボールの軌跡は

$$y = -\frac{1}{L}x^2 + x \tag{26}$$

である．$L = 107$ m を代入すると，$x = 97.5$ m での y は $y = 8.66$ m であることが分かる．いま $y = 0$ は地面から高さ 1.22 m の地点であるから，フェンスの高さの上限は $8.66 + 1.22 = 9.88$ m である．

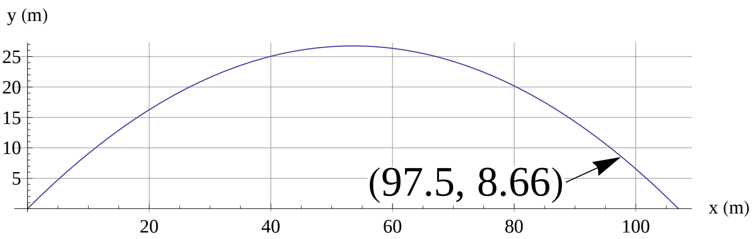

図 6　ボールの軌道.

I-4 等速円運動　原点が中心の半径 L の円上を角速度 ω で運動している点の座標 $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} L\cos\omega t \\ L\sin\omega t \end{pmatrix} \tag{27}$$

と表すのが便利である．今の場合は $L = 5$ m で点が宇宙飛行士だと思えばよい．宇宙飛行士の加速度は

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -\omega^2 \boldsymbol{r} \tag{28}$$

である．したがって，加速度の大きさは

$$\|\ddot{\boldsymbol{r}}\| = \omega^2 \|\boldsymbol{r}\| = \omega^2 L \tag{29}$$

いまこれが重力加速度 $g = 9.8$ m/s^2 の 7 倍なので，

$$\omega^2 L = 7g \quad \to \quad \omega = \sqrt{\frac{7g}{L}} \tag{30}$$

1. 宇宙飛行士の速さは
$$v = L\omega = \sqrt{7gL} = 18.5 \text{ m/s} \tag{31}$$

2. 宇宙飛行士の 1 秒あたりの回転数（振動数）は
$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{7g}{L}} = 0.59 \text{ 回/s} \tag{32}$$

I-5 等速円運動　地球の中心を座標原点にとり，赤道上の物体の座標 $\boldsymbol{r}$ を I-4 と同様に表す．ここでは $L =$ 地球の半径 (6.37×10^3 km$= 6.37 \times 10^6$ m)，$\omega =$ 地球の自転の角速度 (2π rad/24 hours$= 7.27 \times 10^{-5}$ rad/s) である．このとき，赤道上の物体の加速度の大きさは

$$\omega^2 L = 3.37 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2 \tag{33}$$

である．また，地球の自転の角速度を知らないとして，赤道上の物体の加速度が 9.8 m/s^2 であるとすると，地球の自転の角速度は

$$\omega = \sqrt{\frac{9.8}{L}} = 1.24 \times 10^{-3} \text{ rad/s} \tag{34}$$

でなくてはならない．これは自転周期 T が

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 5.07 \times 10^3 \text{ 秒} \simeq 84 \text{ 分} \tag{35}$$

でなくてはならないことを意味する．

I-6 力　ドライバーの上半身の 1 点（例えば重心）の 1 次元運動を考える．注目する点の座標を x で表す．自動車が衝突した瞬間を $t=0$ とし，$x(0)=0$ とする．また，$\dot{x}(0)=V(=53\ \mathrm{km/h})$ とおく．衝突してから止まるまでの間にドライバーの上半身に一定の力 F がかかったとすると，この間 x が従う方程式は，ドライバーの上半身の質量を $m(=66\ \mathrm{kg})$ として，

$$m\ddot{x}(t)=F \tag{36}$$

$x(0)=0, \dot{x}(0)=V$ に注意すると，解は

$$x(t)=\frac{F}{2m}t^2+Vt \tag{37}$$

と表される．さて，ドライバーが止まった時刻を T とおく:

$$\dot{x}(T)=\frac{F}{m}T+V=0. \tag{38}$$

一方，止まるまでにドライバーの上半身は $L(=65\ \mathrm{cm})$ だけ進んでいるので，

$$x(T)=\frac{F}{2m}T^2+VT=L \tag{39}$$

が成り立つ．式 (38),(39) を解けば，

$$F=-\frac{mV^2}{2L} \tag{40}$$

を得る．具体的に数値を代入すれば，力の大きさは

$$|F|=\frac{66\times\left(\frac{53\times10^3}{3600}\right)^2}{2\times0.65}=1.1\times10^4\ \mathrm{N} \tag{41}$$

と分かる．

(運動方程式を解かなくても，衝突から止まるまでにエアバッグがドライバーにした仕事 = はじめのドライバーの運動エネルギーであることを用いてもよい.)

I-7 力

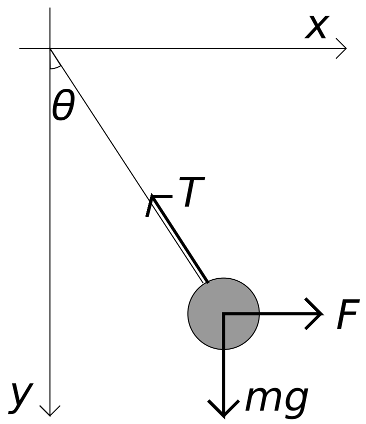

図 7　ひもにつながった球.

図のように座標をとる．ひもの張力を T，球が風から受ける力を F，球の質量を $m(=3.0\times10^{-4}\ \mathrm{kg})$，ひもと鉛直軸 ($y$ 軸) とがなす角を $\theta(=30$ 度$)$ とする．球が受ける力はつりあっているので，力を x,y 成分に分ければ

$$T\cos\theta=mg \tag{42}$$
$$T\sin\theta=F \tag{43}$$

が成り立つ．

1.　2 式から T を消去して，

$$F = mg\tan\theta = 3.0\times10^{-4}\times9.8\times\frac{1}{\sqrt{3}} = 1.7\times10^{-3}\ \mathrm{N} \tag{44}$$

　を得る．

2.

$$T = \frac{F}{\sin\theta} = \frac{mg}{\cos\theta} = 3.4\times10^{-3}\ \mathrm{N} \tag{45}$$