量子力学 III　第 3 回レポート問題　2016 年 11 月 11 日出題

第 1 問：Helmholtz 方程式の Green 関数

次の方程式の解を Helmholtz 方程式の Green 関数という。

$$(\nabla^2 + k^2)\phi(\boldsymbol{x}) = \delta(\boldsymbol{x}). \tag{1}$$

ただし，$\phi(\boldsymbol{x})$ は $\mathbb{R}^3$ 上の関数で，∇ は $\boldsymbol{x}$ に関する微分，k は方程式の実数パラメータである。

(1)　方程式 (1) の解 ϕ_k がひとつ与えられたとき，方程式

$$(\nabla^2 + k^2)\phi(\boldsymbol{x}) = \rho(\boldsymbol{x}) \tag{2}$$

の解をひとつ構成せよ。

(2)　方程式 (1) の解 ϕ_k を次のように Fourier 変換する。

$$\phi_k(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\phi}_k(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{\xi}. \tag{3}$$

このとき，$\tilde{\phi}_k(\boldsymbol{\xi})$ の関数形を決定せよ。

(3)　方程式 (1) の解として，線形独立なものを次の方法で 2 つ得よ。$\tilde{\phi}_k(\boldsymbol{\xi})$ は k をパラメータとして含んでいるが，これを $k \pm i\epsilon$ に置き換えたものを $\phi_{k\pm i\epsilon}(\boldsymbol{\xi})$ と書く。ただし，$\epsilon > 0$ とする。このとき，

$$\phi_k^{\pm}(\boldsymbol{x}) = \lim_{\epsilon\downarrow 0}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\phi}_{k\pm i\epsilon}(\boldsymbol{\xi}) e^{i\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{\xi} \tag{4}$$

を求めよ。

(4)　(3) で得た $\phi_k^{\pm}(\boldsymbol{x})$ が実際に (1) の解となっていることを確認せよ。あるいは (3) でのパラメータ ϵ やデルタ関数 $\delta(\boldsymbol{x})$ の取り扱いを厳密化せよ。

第 2 問：Bessel 関数と平面波の展開

次の微分方程式を Bessel の微分方程式という。

$$\frac{d^2}{dz^2}y(z) + \frac{1}{z}\frac{d}{dz}y(z) + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)y(z) = 0. \tag{5}$$

ただし，$y(z)$ は複素関数，$\nu \in \mathbb{C}$ は方程式のパラメータである。微分方程式の一般論より（$z = 0$ が確定特異点なので[*1]）

$$y(z) = z^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{6}$$

という形の級数解が存在する。ただし，$\rho \in \mathbb{C}$, $c_n \in \mathbb{C}$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$, $c_0 \neq 0$ である。ここで，ρ は（$z = 0$ における）特性指数と呼ばれる。

[*1] 例えば，原岡「複素領域における線形微分方程式」（数学書房）など。

(1)　$\rho = \nu$ または $\rho = -\nu$ に限られることを示せ。

(2)　$\rho \notin \frac{1}{2}\mathbb{Z}_{<0}$ のとき[*2]，展開係数 c_n の満たす漸化式を導け。

(3)　適当な初期条件のもとで，(2) の漸化式を解け。

特に，$\nu = n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$（非負整数）のとき，特性指数を $\rho = n$，展開係数の初期条件を $c_0 = \frac{1}{2^n n!}$ としたものを $J_n(z)$ と書く。さらに $n \in \mathbb{Z}_{<0}$ に対して，

$$J_n(z) := (-1)^n J_{-n}(z) \tag{7}$$

と定める。このとき，2 次元の平面波が次のように展開される。

$$e^{iz\cos\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} A_n J_n(z) e^{in\theta}. \tag{8}$$

ただし，$A_n \in \mathbb{C}$ $(n \in \mathbb{Z})$ は展開係数である。

(4)　展開係数 A_n を求めよ。

第 3 問：Born 近似による散乱振幅

散乱ポテンシャルを $U(\boldsymbol{x})$，入射波の波数を $\boldsymbol{k}$ とする。波数 $\boldsymbol{k}'$ の散乱波に関する散乱振幅は，第 1Born 近似では

$$f_{\boldsymbol{k}}^{(1)}(\boldsymbol{k}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U(\boldsymbol{x}) e^{-i(\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k})\cdot\boldsymbol{x}} d\boldsymbol{x} \tag{9}$$

と表される。ただし $|\boldsymbol{k}| = |\boldsymbol{k}'|$ である。散乱ポテンシャルが次で与えられたとき，第 1Born 近似での散乱振幅を求めよ。

(1)　$U_0 > 0,\ a > 0$ として，

$$U(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} U_0 & |\boldsymbol{x}| < a, \\ 0 & |\boldsymbol{x}| > a. \end{cases} \tag{10}$$

(2)　$U_0 > 0,\ a > 0$ として，

$$U(\boldsymbol{x}) = U_0 e^{-|\boldsymbol{x}|^2/a^2}. \tag{11}$$

[*2] $\frac{1}{2}\mathbb{Z}_{<0} := \left\{\frac{n}{2} \middle| n \in \mathbb{Z}_{<0}\right\} = \left\{-\frac{1}{2}, -1, -\frac{3}{2}, -2\cdots\right\}$ としている。