量子力学 III　第 2 回レポート問題　2016 年 10 月 18 日出題

第 1 問：3 次元自由粒子の動径波動関数

次の微分方程式を（必要なら誘導に従って）解け。

$$\left(\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} + 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}\right)R_\ell(\rho) = 0. \tag{1}$$

(1)　$R_0(\rho) = u_0(\rho)/\rho$ とおいて $u_0(\rho)$ が満たす微分方程式を導け。また，その解として線形独立なものを求めよ。

(2)　$R_\ell(\rho) = \rho^\ell \chi_\ell(\rho)$ と表したとき，$\chi_\ell(\rho)$ の満たす微分方程式を導け。

(3)　$\frac{d\chi_\ell(\rho)}{d\rho} = \rho\tilde{\chi}_\ell(\rho)$ とおいて，$\tilde{\chi}_\ell(\rho)$ の満たす微分方程式を導け。また，$\chi_\ell(\rho)$ と $\chi_{\ell+1}(\rho)$ を関係づける漸化式を導け。

(4)　微分方程式 (1) の一般解として線形独立なものを求めよ。

(5)　(4) で求めた一般解を ℓ が小さいとき（$\ell = 0, 1, 2$ くらい）に具体的に書き下せ。また，それらの概形，$\rho \to 0$ や $\rho \to \infty$ での漸近形を調べて関数の雰囲気を把握せよ。

第 2 問：平面波の球面波展開

3 次元空間中の平面波 $e^{ikz} = e^{ikr\cos\theta}$ を次の形に展開する。

$$e^{ikr\cos\theta} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell j_\ell(kr) P_\ell(\cos\theta). \tag{2}$$

ここで，極座標 (r, θ, ϕ) は z 軸との角度を θ とするようにとった。ただし，$j_\ell(\rho)$ は第 1 問で得た微分方程式 (1) の解のうち $\rho = 0$ で正則なもの，$P_\ell(x)$ は Legendre 多項式

$$P_\ell(x) = \frac{1}{2^\ell \ell!}\frac{d^\ell}{dx^\ell}(x^2-1)^\ell \tag{3}$$

であり，x を変数とする多項式のなすベクトル空間 $\mathbb{C}[x]$ の基底を与える。

(1)　$P_\ell(x)$ が高々 ℓ 次の多項式であることを示せ。また，x^ℓ の係数を求めよ。

(2)　Legendre 多項式の直交関係

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x) P_{\ell'}(x) dx = \delta_{\ell,\ell'}\frac{2}{2\ell+1} \tag{4}$$

を示せ。

(3)　式 (2) の係数 A_ℓ を求めよ。ただし，$j_\ell(\rho)$ の $\rho \to 0$ での漸近形は

$$j_\ell(\rho) \sim \frac{\rho^\ell}{(2\ell+1)!!} \tag{5}$$

で与えられることを用いてよい。