量子力学 III　演習問題　解答

第 1 問：電磁場の正準形式

(1)　全微分 df を dR_λ と dI_λ で展開すると，

$$df = \frac{\partial f}{\partial R_\lambda} dR_\lambda + \frac{\partial f}{\partial I_\lambda} dI_\lambda \tag{i}$$

である。ここに

$$dR_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} dQ_\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}} dQ_{-\lambda}, \tag{ii}$$

$$dI_\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}i} dQ_\lambda - \frac{1}{\sqrt{2}i} dQ_{-\lambda} \tag{iii}$$

を代入すると，

$$df = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial R_\lambda} - i \frac{\partial f}{\partial I_\lambda} \right) dQ_\lambda + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial R_\lambda} + i \frac{\partial f}{\partial I_\lambda} \right) dQ_{-\lambda} \tag{iv}$$

となるので，

$$\frac{\partial}{\partial Q_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial R_\lambda} - i \frac{\partial}{\partial I_\lambda} \right), \tag{v}$$

$$\frac{\partial}{\partial Q_{-\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial R_\lambda} + i \frac{\partial}{\partial I_\lambda} \right) \tag{vi}$$

であることが分かる。

(2)　$\lambda \neq \pm\lambda'$ のとき，

$$\frac{\partial Q_\lambda}{\partial Q_{\lambda'}} = 0 \tag{vii}$$

であることは明らか。$\lambda > 0$ として，$\lambda' = \lambda$ のときは，

$$\frac{\partial Q_\lambda}{\partial Q_\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial Q_\lambda}{\partial R_\lambda} - i \frac{\partial Q_\lambda}{\partial I_\lambda} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = 1 \tag{viii}$$

であり，$\lambda' = -\lambda$ のときは，

$$\frac{\partial Q_\lambda}{\partial Q_{-\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial Q_\lambda}{\partial R_\lambda} + i \frac{\partial Q_\lambda}{\partial I_\lambda} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{i}{\sqrt{2}} \right) = 0 \tag{ix}$$

となる。

(3)　$\lambda > 0$ として，

$$\Pi_\lambda = \epsilon_0 \dot{Q}_{-\lambda}, \tag{x}$$

$$\Pi_{-\lambda} = \epsilon_0 \dot{Q}_\lambda \tag{xi}$$

である。

(4)　電磁場のハミルトニアンは

$$\begin{aligned}\mathscr{H} &= \sum_{\lambda>0}\left(\Pi_\lambda \dot{Q}_\lambda + \Pi_{-\lambda}\dot{Q}_{-\lambda}\right) - \mathscr{L} \\ &= \sum_{\lambda>0}\left(\frac{1}{\epsilon_0}\Pi_\lambda\Pi_{-\lambda} + \frac{k^2}{\mu_0}Q_\lambda Q_{-\lambda}\right) \qquad \text{(xii)}\end{aligned}$$

となる。

(5)　正準方程式により，

$$\dot{Q}_\lambda = \frac{1}{\epsilon_0}\Pi_{-\lambda} \qquad \text{(xiii)}$$

である。さらに時間微分を行うと，

$$\ddot{Q}_\lambda = -\frac{1}{\epsilon_0}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_{-\lambda}} = -\frac{k^2}{\epsilon_0\mu_0}Q_\lambda \qquad \text{(xiv)}$$

が得られる。

第 2 問：実スカラー場の正準量子化

(1)　Fourier 展開を運動方程式 (7) に代入すると，

$$\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3}\ddot{Q}_{\boldsymbol{k}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3}(-v^2|\boldsymbol{k}|^2)Q_{\boldsymbol{k}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \qquad \text{(xv)}$$

となる。両辺で $e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}$ の係数を比較することで，$Q_{\boldsymbol{k}}$ は運動方程式

$$\ddot{Q}_{\boldsymbol{k}} = -v^2|\boldsymbol{k}|^2 Q_{\boldsymbol{k}} \qquad \text{(xvi)}$$

に従うことが分かる。また，ϕ が実数に値をとることから，その Fourier 係数は $Q^*_{\boldsymbol{k}} = Q_{-\boldsymbol{k}}$ を満たすことが分かる。

(2)　$\dot{Q}_{\boldsymbol{k}}\dot{Q}_{-\boldsymbol{k}}$ も $Q_{\boldsymbol{k}}Q_{-\boldsymbol{k}}$ も，$\boldsymbol{k} \to -\boldsymbol{k}$ の変換に対して不変なので，和の中には同じ項が 2 回ずつ現れていることに注意すると，

$$\Pi_{\boldsymbol{k}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{Q}_{\boldsymbol{k}}} = \rho\dot{Q}_{-\boldsymbol{k}} \qquad \text{(xvii)}$$

となることが分かる。

(3)　ハミルトニアンは

$$\mathscr{H} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3}\left(\frac{1}{2\rho}\Pi_{\boldsymbol{k}}\Pi_{-\boldsymbol{k}} + \frac{\rho\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{2}Q_{\boldsymbol{k}}Q_{-\boldsymbol{k}}\right) \qquad \text{(xviii)}$$

(4)　正準方程式により，

$$\dot{Q}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\rho}\Pi_{-\boldsymbol{k}} \qquad \text{(xix)}$$

を得る。さらに時間微分をすると，

$$\ddot{Q}_{\boldsymbol{k}} = -\frac{1}{\rho}\rho\omega_{\boldsymbol{k}}^2 Q_{\boldsymbol{k}} = -\omega_{\boldsymbol{k}}^2 Q_{\boldsymbol{k}} \qquad \text{(xx)}$$

となり，運動方程式を再現することが分かる。

(5)　まず，量子化されたハミルトニアン $\hat{\mathscr{H}}$ を $\hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}}$ と $\hat{Q}_{\boldsymbol{k}}$ で書くと，

$$\hat{\mathscr{H}} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \left(\frac{1}{2\rho}\hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}}\hat{\Pi}_{-\boldsymbol{k}} + \frac{\rho\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{2}\hat{Q}_{\boldsymbol{k}}\hat{Q}_{-\boldsymbol{k}} \right) \tag{xxi}$$

となる。$\hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}}$ 同士，$\hat{Q}_{\boldsymbol{k}}$ 同士は可換なので，積の部分の表示に任意性はないことに注意する。$\hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}}$ を $\hat{\pi}_{\boldsymbol{k}}$ で書き直し，$\hat{Q}_{\boldsymbol{k}}$ を $\hat{q}_{\boldsymbol{k}}$ で書き直すと，

$$\hat{\mathscr{H}} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{2} \left(\hat{\pi}_{\boldsymbol{k}}\hat{\pi}_{-\boldsymbol{k}} + \hat{q}_{\boldsymbol{k}}\hat{q}_{-\boldsymbol{k}} \right) \tag{xxii}$$

となる。

(6)　$\hat{\pi}_{\boldsymbol{k}}$ と $\hat{q}_{\boldsymbol{k}}$ の交換関係は

$$[i\hat{\pi}_{\boldsymbol{k}}, \hat{q}_{\boldsymbol{k}'}] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}, \quad [\hat{\pi}_{\boldsymbol{k}}, \hat{\pi}_{\boldsymbol{k}'}] = [\hat{q}_{\boldsymbol{k}}, \hat{q}_{\boldsymbol{k}'}] = 0 \tag{xxiii}$$

であることに注意すれば，直接計算により，

$$[\hat{c}_{\boldsymbol{k}}, \hat{c}_{\boldsymbol{k}'}] = 0, \quad [\hat{c}_{\boldsymbol{k}}, \hat{c}_{\boldsymbol{k}'}^\dagger] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \tag{xxiv}$$

であることが分かる。

(7)　$\hat{c}_{\boldsymbol{k}}$ の定義より，

$$\hat{\pi}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hat{c}_{-\boldsymbol{k}} - \hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger}{\sqrt{2}i}, \quad \hat{q}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hat{c}_{\boldsymbol{k}} + \hat{c}_{-\boldsymbol{k}}^\dagger}{\sqrt{2}} \tag{xxv}$$

である。これらをハミルトニアンに代入して整理すれば，

$$\hat{\mathscr{H}} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \frac{\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}^2}{2} \left(\hat{c}_{\boldsymbol{k}}\hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger + \hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger\hat{c}_{\boldsymbol{k}} \right) \tag{xxvi}$$

と書ける。式 (xxiv) を用いると，

$$[\hat{\mathscr{H}}, \hat{c}_{\boldsymbol{k}}] = -\hbar\omega_{\boldsymbol{k}}\hat{c}_{\boldsymbol{k}} \tag{xxvii}$$

であることも分かる。

(8)　まず，$\hat{\phi}(\boldsymbol{x})$ と $\hat{\theta}(\boldsymbol{x})$ を $\hat{c}_{\boldsymbol{k}}$ を用いて表すと，

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(\boldsymbol{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2|\Omega|}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \ell_{\boldsymbol{k}} \left(\hat{c}_{\boldsymbol{k}} + \hat{c}_{-\boldsymbol{k}}^\dagger \right) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2|\Omega|}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \ell_{\boldsymbol{k}} \left(\hat{c}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right), \end{aligned} \tag{xxviii}$$

$$\begin{aligned}\hat{\theta}(\boldsymbol{x}) &= \frac{-i\hbar}{\sqrt{2|\Omega|}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \ell_{\boldsymbol{k}}^{-1} \left(\hat{c}_{-\boldsymbol{k}} - \hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger \right) e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \\ &= \frac{-i\hbar}{\sqrt{2|\Omega|}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \ell_{\boldsymbol{k}}^{-1} \left(\hat{c}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} - \hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \right) \end{aligned} \tag{xxix}$$

となる。再び，(xxiv) を用いて，交換子 $[\hat{\theta}(\boldsymbol{x}), \hat{\phi}(\boldsymbol{x}')]$ を計算すると，

$$
\begin{aligned}
[\hat{\theta}(\boldsymbol{x}), \hat{\phi}(\boldsymbol{x}')] &= \frac{-i\hbar}{2|\Omega|} \sum_{\boldsymbol{k} \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \left(e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} + e^{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} \right) \\
&= \frac{-i\hbar}{|\Omega|} \sum_{\boldsymbol{k} \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')} \\
&= -i\hbar\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \qquad \text{(xxx)}
\end{aligned}
$$

となることが分かる。

第 3 問：電気双極子モーメントの選択則

(1) $\mu = x, y, z$ を一つ決めたとき，$\epsilon_{\mu\nu\rho}$ がゼロでないような (μ, ν) の組みは二通りしかないことに注意すれば，$\hat{L}_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho}\hat{\gamma}_\nu\hat{p}_\rho$ が角運動量演算子となっていることは明らかである。

(2) 直接計算により，

$$
\begin{aligned}
[\hat{L}_\mu, \hat{\gamma}_\nu] &= \epsilon_{\mu\lambda\rho}\hat{\gamma}_\lambda[\hat{p}_\rho, \hat{\gamma}_\nu] \\
&= -i\hbar\epsilon_{\mu\lambda\nu}\hat{\gamma}_\lambda \\
&= i\hbar\epsilon_{\mu\nu\lambda}\hat{\gamma}_\lambda \qquad \text{(xxxi)}
\end{aligned}
$$

が示される。

(3) 直接計算すれば良い：

$$
\begin{aligned}
[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\gamma}_\mu] &= [\hat{L}_\lambda\hat{L}_\lambda, \hat{\gamma}_\mu] \\
&= [\hat{L}_\lambda, \hat{\gamma}_\mu]\hat{L}_\lambda + \hat{L}_\lambda[\hat{L}_\lambda, \hat{\gamma}_\mu] \\
&= i\hbar\epsilon_{\lambda\mu\rho}\left(\hat{\gamma}_\rho\hat{L}_\lambda + \hat{L}_\lambda\hat{\gamma}_\rho\right) \\
&= -i\hbar\epsilon_{\mu\lambda\rho}\left(\hat{\gamma}_\rho\hat{L}_\lambda + \hat{L}_\lambda\hat{\gamma}_\rho\right). \qquad \text{(xxxii)}
\end{aligned}
$$

(4) $\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon_{\mu'\nu'\rho}$ がゼロにならないのは $(\mu, \nu) = (\mu', \nu')$ または $(\mu, \nu) = (\nu', \mu')$ のときに限られるのは明らか。それぞれの場合の値も簡単に分かる。

(5)　(3) と (4) の結果と $[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{L}_\mu] = 0$ を用いると，

$$\begin{aligned}
[\hat{\boldsymbol{L}}^2, [\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\gamma}_\mu]] &= -i\hbar\epsilon_{\mu\lambda\rho}[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\gamma}_\rho\hat{L}_\lambda + \hat{L}_\lambda\hat{\gamma}_\rho] \\
&= (-i\hbar)^2\epsilon_{\mu\lambda\rho}\epsilon_{\rho\mu'\lambda'}\big((\hat{\gamma}_{\mu'}\hat{L}_{\lambda'} + \hat{L}_{\lambda'}\hat{\gamma}_{\mu'})\hat{L}_\lambda + \hat{L}_\lambda(\hat{\gamma}_{\mu'}\hat{L}_{\lambda'} + \hat{L}_{\lambda'}\hat{\gamma}_{\mu'})\big) \\
&= \hbar^2\Big[\hat{\gamma}_\mu\hat{L}_\lambda\hat{L}_\lambda + \hat{L}_\lambda\hat{\gamma}_\mu\hat{L}_\lambda + \hat{L}_\lambda\hat{\gamma}_\mu\hat{L}_\lambda + \hat{L}_\lambda\hat{L}_\lambda\hat{\gamma}_\mu \\
&\qquad - \hat{\gamma}_\lambda\hat{L}_\mu\hat{L}_\lambda - \hat{L}_\mu\underbrace{\hat{\gamma}_\lambda\hat{L}_\lambda}_{=0} - \underbrace{\hat{L}_\lambda\hat{\gamma}_\lambda}_{=0}\hat{L}_\mu - \hat{L}_\lambda\hat{L}_\mu\hat{\gamma}_\lambda\Big] \\
&= \hbar^2\Big[2\hat{\gamma}_\mu\hat{\boldsymbol{L}}^2 + 2\hat{\boldsymbol{L}}^2\hat{\gamma}_\mu + \hat{L}_\lambda[\hat{\gamma}_\mu, \hat{L}_\lambda] + [\hat{L}_\lambda, \hat{\gamma}_\mu]\hat{L}_\lambda \\
&\qquad - \hat{L}_\mu\underbrace{\hat{\gamma}_\lambda\hat{L}_\lambda}_{=0} - [\hat{\gamma}_\lambda, \hat{L}_\mu]\hat{L}_\lambda - \underbrace{\hat{L}_\lambda\hat{\gamma}_\lambda}_{=0}\hat{L}_\mu - \hat{L}_\lambda[\hat{L}_\mu, \hat{\gamma}_\lambda]\Big] \\
&= \hbar^2\Big[2\hat{\gamma}_\mu\hat{\boldsymbol{L}}^2 + 2\hat{\boldsymbol{L}}^2\hat{\gamma}_\mu - [\hat{L}_\lambda, [\hat{L}_\lambda, \hat{\gamma}_\mu]] - [\hat{L}_\lambda, [\hat{L}_\mu, \hat{\gamma}_\lambda]]\Big] \qquad \text{(xxxiii)}
\end{aligned}$$

となる。最後に，

$$[\hat{L}_\lambda, [\hat{L}_\lambda, \hat{\gamma}_\mu]] + [\hat{L}_\lambda, [\hat{L}_\mu, \hat{\gamma}_\lambda]] = i\hbar\epsilon_{\lambda\mu\nu}\big([\hat{L}_\lambda, \hat{\gamma}_\nu] - [\hat{L}_\lambda, \hat{\gamma}_\nu]\big) = 0 \qquad \text{(xxxiv)}$$

が成り立つことに注意すると，

$$[\hat{\boldsymbol{L}}^2, [\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\gamma}_\mu]] = 2\hbar^2(\hat{\gamma}_\mu\hat{\boldsymbol{L}}^2 + \hat{\boldsymbol{L}}^2\hat{\gamma}_\mu) \qquad \text{(xxxv)}$$

が得られる。