量子力学 III　演習問題　2016 年 11 月 21 日出題

第 1 問：電磁場の正準形式

Q_λ をベクトルポテンシャルの Fourier モードとする。講義では，$Q_\lambda := \frac{R_\lambda + iI_\lambda}{\sqrt{2}}$ により，定義される実変数 R_λ と I_λ を独立変数として扱い，電磁場の正準形式を導出した。ここでは，Q_λ と $Q_\lambda^* = Q_{-\lambda}$ を（複素）独立変数として扱うことで，電磁場の正準形式を導出する。

(1)　f を R_λ と I_λ の関数とする。その全微分を

$$df = \frac{\partial f}{\partial Q_\lambda} dQ_\lambda + \frac{\partial f}{\partial Q_{-\lambda}} dQ_{-\lambda} \tag{1}$$

と書いたとき，$\frac{\partial}{\partial Q_\lambda}$ と $\frac{\partial}{\partial Q_{-\lambda}}$ を $\frac{\partial}{\partial R_\lambda}$ と $\frac{\partial}{\partial I_\lambda}$ を用いて表せ*1。

(2)　次を示せ:

$$\frac{\partial Q_\lambda}{\partial Q_{\lambda'}} = \delta_{\lambda,\lambda'}. \tag{2}$$

(3)　電磁場のラグランジアンは

$$\mathscr{L} = \sum_{\lambda>0} \left(\epsilon_0 \dot{Q}_\lambda \dot{Q}_{-\lambda} - \frac{k^2}{\mu_0} Q_\lambda Q_{-\lambda} \right) \tag{3}$$

で与えられる。Q_λ に共役な運動量 $\Pi_\lambda = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{Q}_\lambda}$ を求めよ。

(4)　電磁場のハミルトニアン

$$\mathscr{H} = \sum_{\lambda>0} \left(\Pi_\lambda \dot{Q}_\lambda + \Pi_{-\lambda} \dot{Q}_{-\lambda} \right) - \mathscr{L} \tag{4}$$

を Q_λ と Π_λ を用いて表せ。

(5)　正準方程式

$$\dot{Q}_\lambda = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \Pi_\lambda}, \quad \dot{\Pi}_\lambda = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_\lambda} \tag{5}$$

が電磁場の運動方程式

$$\ddot{Q}_\lambda = -\frac{k^2}{\epsilon_0 \mu_0} Q_\lambda \tag{6}$$

を再現することを確かめよ。

第 2 問：実スカラー場の正準量子化

電磁場の正準量子化に倣って，実スカラー場の正準量子化を行う。一辺の長さが L の立方体を $\Omega = [0, L]^3 \subset \mathbb{R}^3$ で表し，周期的境界条件を課す。実スカラー場とは実数値関数 $\phi : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で

*1 幾何学的には，局所座標系の変換 $(R_\lambda, I_\lambda) \to (Q_\lambda, Q_{-\lambda})$ に伴う接ベクトル空間の基底の変換行列を求めることになっている。

あって，運動方程式

$$\frac{\partial^2 \phi(\boldsymbol{x},t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \phi(\boldsymbol{x},t) \tag{7}$$

に従うものである。

(1) 実スカラー場 $\phi(\boldsymbol{x},t)$ を次のように Fourier 展開する：

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} Q_{\boldsymbol{k}}(t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}. \tag{8}$$

ただし，$|\Omega| = L^3$ は系の体積を表す。このとき，Fourier 係数 $Q_{\boldsymbol{k}}(t)$ が満たす運動方程式を求めよ。また，Fourier 係数の複素共役 $Q_{\boldsymbol{k}}(t)^*$ を $Q_{\boldsymbol{k}}(t)$ を用いて表せ。

(2) 次の形のラグランジアンを考える：

$$\mathscr{L} = \frac{\rho}{2} \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \dot{Q}_{\boldsymbol{k}} \dot{Q}_{-\boldsymbol{k}} - \frac{\rho}{2} \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \omega_{\boldsymbol{k}}^2 Q_{\boldsymbol{k}} Q_{-\boldsymbol{k}}. \tag{9}$$

ここで，ρ は [質量]/([長さ][ϕ]) の次元をもつパラメータ，$\omega_{\boldsymbol{k}} = v|\boldsymbol{k}|^2$ とした。$Q_{\boldsymbol{k}}$ に共役な運動量 $\Pi_{\boldsymbol{k}} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{Q}_{\boldsymbol{k}}}$ を求めよ。

(3) ハミルトニアン

$$\mathscr{H} = \sum_{\boldsymbol{k}\in\frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \Pi_{\boldsymbol{k}} \dot{Q}_{\boldsymbol{k}} - \mathscr{L} \tag{10}$$

を $Q_{\boldsymbol{k}}$ と $\Pi_{\boldsymbol{k}}$ で表せ。

(4) 正準方程式

$$\frac{dQ_{\boldsymbol{k}}}{dt} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \Pi_{\boldsymbol{k}}}, \quad \frac{d\Pi_{\boldsymbol{k}}}{dt} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_{\boldsymbol{k}}} \tag{11}$$

が (1) で導いた運動方程式を再現することを確かめよ。

(5) 正準変数 $Q_{\boldsymbol{k}}$ と $\Pi_{\boldsymbol{k}}$ を次の交換関係をもつ演算子 $\hat{Q}_{\boldsymbol{k}}$ と $\hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}}$ におきかえることで，正準量子化を行う：

$$[i\hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}}, \hat{Q}_{\boldsymbol{k}'}] = \hbar\delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'}, \quad [\hat{Q}_{\boldsymbol{k}}, \hat{Q}_{\boldsymbol{k}'}] = [\hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}}, \hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}'}] = 0. \tag{12}$$

さらに，$\ell_{\boldsymbol{k}} = (\hbar/\rho\omega_{\boldsymbol{k}})^{1/2}$ として，

$$\hat{Q}_{\boldsymbol{k}} = \ell_{\boldsymbol{k}} \hat{q}_{\boldsymbol{k}}, \quad \hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}} = \frac{\hbar}{\ell_{\boldsymbol{k}}} \hat{\pi}_{\boldsymbol{k}} \tag{13}$$

により，$q_{\boldsymbol{k}}$ と $\pi_{\boldsymbol{k}}$ を定める。このとき，量子化されたハミルトニアン $\hat{\mathscr{H}}$ を $\hat{q}_{\boldsymbol{k}}$ と $\hat{\pi}_{\boldsymbol{k}}$ を用いて表せ。

(6) 新たに演算子

$$\hat{c}_{\boldsymbol{k}} = \frac{1}{\sqrt{2}} (i\hat{\pi}_{\boldsymbol{k}} + \hat{q}_{\boldsymbol{k}}) \tag{14}$$

を導入する。このとき交換子 $[\hat{c}_{\boldsymbol{k}}, \hat{c}_{\boldsymbol{k}'}]$, $[\hat{c}_{\boldsymbol{k}}, \hat{c}_{\boldsymbol{k}'}^\dagger]$ を求めよ。

(7) ハミルトニアン $\hat{\mathscr{H}}$ を $\hat{c}_{\boldsymbol{k}}$ と $\hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ を用いて表せ。さらに，交換子 $[\hat{\mathscr{H}}, \hat{c}_{\boldsymbol{k}}]$ を求めよ。

(8)　演算子 $\hat{Q}_{\boldsymbol{k}}$, $\hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}}$ の Fourier 逆変換

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\boldsymbol{k} \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \hat{Q}_{\boldsymbol{k}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}, \tag{15}$$

$$\hat{\theta}(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\boldsymbol{k} \in \frac{2\pi}{L}\mathbb{Z}^3} \hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}} e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{16}$$

は量子化された場と呼ばれる。交換子 $[\hat{\theta}(\boldsymbol{x}), \hat{\phi}(\boldsymbol{x}')]$ を求めよ。

第 3 問：電気双極子モーメントの選択則

(1)　$\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{z}$ を位置演算子，$\hat{p}_x$, $\hat{p}_y$, $\hat{p}_z$ を運動量演算子とする。このとき，角運動量演算子は

$$\begin{pmatrix} \hat{L}_x \\ \hat{L}_y \\ \hat{L}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y \\ \hat{z}\hat{p}_x - \hat{x}\hat{p}_z \\ \hat{x}\hat{p}_y - \hat{y}\hat{p}_x \end{pmatrix} \tag{17}$$

で与えられるのだった。$\hat{\gamma}_x = \hat{x}$, $\hat{\gamma}_y = \hat{y}$, $\hat{\gamma}_z = \hat{z}$ と書くことにすると，

$$\hat{L}_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho}\hat{\gamma}_\nu\hat{p}_\rho \tag{18}$$

と書けることを確認せよ。ただし，$\epsilon_{\mu\nu\rho}$ は

$$\epsilon_{\mu\nu\rho} = \begin{cases} 1 & (\mu,\nu,\rho) = (x,y,z), (y,z,x), (z,x,y) \\ -1 & (\mu,\nu,\rho) = (x,z,y), (z,y,x), (y,x,z) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{19}$$

で定まる完全反対称テンソルであり，右辺ではアインシュタインの規約により和をとっている。

(2)　次の交換関係を示せ：

$$[\hat{L}_\mu, \hat{\gamma}_\nu] = i\hbar\epsilon_{\mu\nu\rho}\hat{\gamma}_\rho. \tag{20}$$

ただし，完全反対称テンソルは定義より $\epsilon_{\mu\nu\rho} = -\epsilon_{\mu\rho\nu}$ などを満たすことに注意せよ。

(3)　全角運動量演算子を $\hat{\boldsymbol{L}}^2 = \hat{L}_\mu\hat{L}_\mu$ とする。次の交換関係を示せ：

$$[\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\gamma}_\mu] = -i\hbar\epsilon_{\mu\nu\rho}(\hat{L}_\nu\hat{\gamma}_\rho + \hat{\gamma}_\rho\hat{L}_\nu). \tag{21}$$

(4)　完全反対称テンソルについて，次の恒等式を示せ：

$$\epsilon_{\mu\nu\rho}\epsilon_{\mu'\nu'\rho} = \delta_{\mu\mu'}\delta_{\nu\nu'} - \delta_{\mu\nu'}\delta_{\nu\mu'} \tag{22}$$

(5)　次の交換関係を示せ：

$$[\hat{\boldsymbol{L}}^2, [\hat{\boldsymbol{L}}^2, \hat{\gamma}_\mu]] = 2\hbar^2\left(\hat{\boldsymbol{L}}^2\hat{\gamma}_\mu + \hat{\gamma}_\mu\hat{\boldsymbol{L}}^2\right). \tag{23}$$