力学 B 演習問題 III 解答例 2013.08.07（TA:越田)

III-1 力学的エネルギー保存の法則　物体が運動する水平方向に x 軸をとる．物体の安定点を $x=0$ にとると，ポテンシャルエネルギーは $V(x)=kx^2/2$ と表される．物体を $x=x_0$ の地点で静かに離すと，その後の運動では

$$\frac{m}{2}\dot{x}^2+\frac{k}{2}x^2=\frac{k}{2}x_0^2 \tag{1}$$

が満たされる．つまり，力学的エネルギーが保存する．

1. 運動エネルギーとポテンシャルエネルギーが等しいとき，すなわち $m\dot{x}^2/2=kx^2/2$ が成り立つとき，

$$2\times\frac{k}{2}x^2=\frac{k}{2}x_0^2. \tag{2}$$

したがって，そのときの物体の位置は $x=\pm x_0/\sqrt{2}$ である．いま，$x_0=10$ cm であるから，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーが等しくなるのは原点から，7.07 cm 離れた地点にあるときである．

2. 速さが最大になるのはポテンシャルエネルギーが最小のときである．そのとき，

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2=\frac{k}{2}x_0^2 \tag{3}$$

が成り立つので，速さの最大値は，$|\dot{x}|=\sqrt{k/m}x_0$ である．$k=65$ N/m，$m=2.5$kg，$x_0=10$ cm のとき，速さの最大値は 0.51 m/s である．

III-2 孤立系で非保存力が仕事をする場合　パラシュート隊員の質量を m，飛行機の速さを $v_{\rm in}$，飛行機の高度を h とすると，はじめの力学的エネルギー $E_{\rm in}$ は，重力加速度を g として，

$$E_{\rm in}=\frac{1}{2}mv_{\rm in}^2+mgh$$

である．一方地上に降りたときの速さを $v_{\rm fin}$ とすると，最後の力学的エネルギー $E_{\rm fin}$ は，

$$E_{\rm fin}=\frac{1}{2}mv_{\rm fin}^2$$

である．この差の分が摩擦により失われたので，生じた熱エネルギー W は

$$W=E_{\rm in}-E_{\rm fin}=\frac{1}{2}mv_{\rm in}^2+mgh-\frac{1}{2}mv_{\rm fin}^2 \tag{4}$$

である．$m=50$ kg，$v_{\rm in}=144$ km/h=40 m/s，$h=1000$ m，$v_{\rm fin}=8$ m/s，$g=9.8$ m/s^2 とすれば，$W=5.28\times10^5$J.

♠ 1 次元空間で完全弾性衝突する 2 物体の問題

1 次元空間での完全弾性衝突を扱う問題がいくつかあるので，そのための準備をしておこう．1 次元空間に 2 物体 1,2 があったとする．ただし，考えている系は正味の外場がかかっていない，孤立系であり，したがって運動量が保存するものとする．それぞれの質量を m_1,m_2 とおく．ある時刻 t での物体 1,2 の運動量をそれぞれ p_1,p_2，別の時刻 $t'>t$ での物体 1,2 の運動量をそれぞれ p_1',p_2' とする．このとき全運動量は保存しているので

$$p_1+p_2=p_1'+p_2'$$

あるいは

$$p_1-p_1'=-(p_2-p_2') \tag{5}$$

が成り立っている．また，全エネルギーも保存するので

$$\frac{p_1^2}{2m_1}+\frac{p_2^2}{2m_2}=\frac{p_2'^2}{2m_1}+\frac{p_2'^2}{2m_2}$$

あるいは

$$\frac{1}{m_1}(p_1^2 - p_1'^2) = -\frac{1}{m_2}(p_2^2 - p_2'^2) \tag{6}$$

が成り立つ．

さて，式 (5) の両辺が 0 のときは，t と t' の間で 2 物体は衝突しておらず，自明な問題である．式 (5) の両辺が 0 でないときには式 (5),(6) から衝突後の運動量 p_1', p_2' が衝突前の運動量 p_1, p_2 を用いて表される．その場合を考えよう．式 (6) が

$$\frac{1}{m_1}(p_1 + p_1')(p_1 - p_1') = -\frac{1}{m_2}(p_2 + p_2')(p_2 - p_2')$$

と変形され，式 (5) の両辺が 0 でないことに注意すると，

$$\frac{1}{m_1}(p_1 + p_1') = \frac{1}{m_2}(p_2 + p_2') \tag{7}$$

が成り立つことが分かる．式 (5),(7) を p_1', p_2' について解くと，

$$p_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}p_1 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}p_2 \tag{8}$$

$$p_2' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2}p_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}p_2 \tag{9}$$

を得る．また，衝突前（後）の物体 $i(i = 1, 2)$ の速度 $v_i^{(\prime)}$ を用いて $p_i^{(\prime)} = m_i v_i^{(\prime)} (i = 1, 2)$ と表すと，衝突後の物体の速度は

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \tag{10}$$

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \tag{11}$$

と表される．

III-3 完全弾性衝突　地球の質量を M，地球の衝突前後の速度をそれぞれ $V > 0,\ V'$，隕石の質量を m，隕石の衝突前の速度を v とおくと，式 (10) より，

$$V' = \frac{M - m}{M + m}V + \frac{2m}{M + m}v$$

が成り立つ．ここで $M \gg m$ であるとすると，

$$\begin{aligned} V' &= \frac{M(1 - m/M)}{M(1 + m/M)}V + \frac{2m}{M(1 + m/M)}v \\ &\simeq\ V + \frac{2m}{M}v \end{aligned}$$

である．$M = 6.0 \times 10^{24}$ kg，$m = 5.0 \times 10^{10}$ kg，$v = -7.2 \times 10^3$ m/s（正面衝突なので − がつく）とすると，地球の速度の変化は

$$V' - V \simeq -1.2 \times 10^{-10}\ \mathrm{m/s} \tag{12}$$

であり，1.2×10^{-10} m/s だけ減速したことが分かる．

衝突を完全非弾性衝突とみた解法

衝突した隕石が再び宇宙空間に帰っていくとも思えないので，隕石の衝突は完全非弾性衝突とみるのが妥当だろう．上で導入した，$M,\ m,\ V,\ V',\ v$ に加えて，衝突後の隕石の速度を v' で表せば，運動量の保存は

$$MV + mv = MV' + mv'$$

と書ける．ところが，完全非弾性衝突では $V' = v'$ が成り立つので，

$$V' = \frac{MV + mv}{M + m}$$

である．さらに $M \gg m$ であることに注意すれば，

$$V' \simeq V + \frac{m}{M} v$$

を得る．$M = 6.0 \times 10^{24}$ kg，$m = 5.0 \times 10^{10}$ kg，$v = -7.2 \times 10^{3}$ m/s とすると，地球の速度の変化は

$$V' - V \simeq = -6.0 \times 10^{-11} \text{ m/s} \tag{13}$$

である，したがって 6.0×10^{-11} m/s だけ減速したことが分かる．

III-4 完全弾性衝突　水素原子の質量を M，水素原子の衝突後の速度を V'，電子の質量を m，電子の衝突前の速度を v とおく．求めるのは，

$$\begin{aligned}
\frac{MV'^2/2}{mv^2/2} &= \frac{MV'^2}{mv^2} \\
&\downarrow \left(\text{式 (10) より } V' = \frac{2m}{M+m} v\right) \\
&= \frac{M}{mv^2} \frac{4m^2}{(M+m)^2} v^2 = \frac{4Mm}{(M+m)^2} \\
&\downarrow (\text{特に，} M \gg m \text{ のときには}) \\
&\simeq \frac{4m}{M} \simeq 2.22 \times 10^{-3} \quad \left(\frac{m}{M} \simeq 1800\right)
\end{aligned} \tag{14}$$

したがって，はじめの電子の運動エネルギーのうち 0.2 % 程度が衝突後に水素原子のエネルギーになった．

III-5 力積　はじめの状態（ぬいぐるみが投げ込まれる）と最後の状態（スケーターがぬいぐるみを保持する/投げ返す/落とす）でぬいぐるみとスケーターの運動量の和が保存する．スケーターは水平方向にしか動けないとすると，運動量は水平方向のみを考えればよい．さらに，スケーターは（投げ返すときは）ぬいぐるみを投げ込まれた方向に投げ返すものとすると，1 次元空間で考えればよいことになる．はじめのスケーターとぬいぐるみの運動量をそれぞれ $p_{\text{ス}}$，$p_{\text{ぬ}}$，最後のスケーターとぬいぐるみの運動量をそれぞれ $p'_{\text{ス}}$，$p'_{\text{ぬ}}$ とする．ただし，$p_{\text{ス}} = 0$ なので，運動量の保存は

$$p_{\text{ぬ}} = p'_{\text{ス}} + p'_{\text{ぬ}} \tag{15}$$

と書ける．一般性を失うことなく $p_{\text{ぬ}} > 0$ としてよい．

(a) スケーターとぬいぐるみの質量をそれぞれ $m_{\text{ス}}$，$m_{\text{ぬ}}$，はじめのぬいぐるみの速度を $v_{\text{ぬ}} > 0$，最後のスケーターとぬいぐるみの速度をそれぞれ $v'_{\text{ス}}$，$v'_{\text{ぬ}}$ とする．いまの場合 $v'_{\text{ス}} = v'_{\text{ぬ}}$ が成り立っているので，

$$m_{\text{ぬ}} v_{\text{ぬ}} = (m_{\text{ス}} + m_{\text{ぬ}}) v'_{\text{ス}} \to p'_{\text{ス}} = \frac{m_{\text{ス}}}{m_{\text{ス}} + m_{\text{ぬ}}} p_{\text{ぬ}} < p_{\text{ぬ}}$$

であることがわかる．

(b) 投げ返したときは，$p'_{\text{ぬ}} < 0$ だから

$$p'_{\text{ス}} = p_{\text{ぬ}} - p'_{\text{ぬ}} > p_{\text{ぬ}}$$

(c)$p'_{\text{ぬ}}$ は詳細には分からないが，おそらく 0 に近いだろうから $p'_{\text{ぬ}} = 0$ とすれば，

$$p'_{\text{ス}} = p_{\text{ぬ}}$$

以上より，スケーターが最大の運動量を獲得するのは (b) の場合であることがわかる．

III-6 完全弾性衝突　はじめに，質量の等しい物体 1, 2 の完全弾性衝突を考えてみる．はじめは物体 1 が速度 v で運動し，物体 2 は静止しているものとする．衝突後のそれぞれの速度は式 (10), (11) で $v_1 = v,\ v_2 = 0,\ m_1 = m_2$ とすれば求められる．その結果，衝突後は物体 1 が静止し，物体 2 が速度 v で運動することが分かる．

したがって，一直線上にいくつ物体が並んでいても，一方が速度 v で運動し，他方は静止している 2 物体の衝突が繰り返されることが言える．本問のように，左側からおもりが速度 v でぶつかったとすると，十分時間がたった後は，一番右のおもりが速度 v で運動していることになる．

III-7 ブロックを貫通する弾丸　ブロックと弾丸の質量をそれぞれ $M(= 5\ \mathrm{kg})$，$\mathrm{m}(= 10\ \mathrm{g})$，ブロックの厚さを $L(= 10\ \mathrm{cm})$ とおく．弾丸のブロックに当たる瞬間の速度を $v_0(= 1000\ \mathrm{m/s})$，ブロックから飛び出した瞬間の速度を $v_1(= 400\ \mathrm{m/s})$ とする．

1. 弾丸がブロックに当たる時刻を $t = 0$，ブロックから飛び出る時刻を $t = T$ とする．鉛直上向きに x 軸をとり，弾丸の位置を x で表す．また，ブロックの下面を $x = 0$ とする．$t \in [0, T]$ での運動を考える限り，ブロックは静止しているものとし，その間弾丸は等加速度運動する．その加速度を a とおくと $x(t)$ は

$$\ddot{x}(t) = a$$

を満たす．$x(0) = 0,\ \dot{x}(0) = v_0$ に注意すると，解は

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t$$

である．ブロックから飛び出す瞬間は $x(T) = L,\ \dot{x}(T) = v_1$ を満たしているから，

$$\begin{aligned} &\frac{a}{2}T^2 + v_0 T = L \\ &aT + v_0 = v_1 \end{aligned}$$

これを $a,\ T$ について解くと，

$$a = -\frac{v_0^2 - v_1^2}{2L} = -4.2 \times 10^6\ \mathrm{m/s^2} \tag{16}$$

$$T = \frac{2L}{v_0 + v_1} = 1.4 \times 10^{-4}\mathrm{s} \tag{17}$$

を得る．

2. ブロックを貫通する間に弾丸が失った運動量は $mv_0 - mv_1 = m(v_0 - v_1) = 6\ \mathrm{kg{\cdot}m/s}$ である．
3. $a \gg g$ であることから，重力による弾丸の減速は無視できる．
4. 鉛直上向きに y 軸をとり，ブロックの高さを y で表す．ただし，ブロックのはじめの位置を $y = 0$ とする．また，今度は弾丸が飛び出した瞬間を $t = 0$ として時間をとる．このとき y の満たすべき運動方程式は

$$\ddot{y}(t) = -g$$

その解は，弾丸が飛び出した瞬間の速度を V_0 として，

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + V_0 t$$

と書ける．$t = 0$ でのブロックの運動量は，弾丸がブロックを貫通する際に失った運動量に等しいので、

$$MV_0 = m(v_0 - v_1) \to V_0 = \frac{m}{M}(v_0 - v_1) = 1.2\ \mathrm{m/s} \tag{18}$$

を得る．

5. 上記の $y(t)$ の表式を変形して

$$y(t) = -\frac{g}{2}\left(t - \frac{V_0}{g}\right)^2 + \frac{V_0^2}{2g} \tag{19}$$

となる．したがって，ブロックは $V_0^2/2g = 7.3$ cm だけはねあがる．

III-8 ブロックを貫通する弾丸　弾丸の質量を $m(= 5\ \mathrm{g})$，衝突前後の速度をそれぞれ $v_0(= 400\ \mathrm{m/s})$, v_1 とする．また，ブロックの質量を $M(= 1\ \mathrm{kg})$，厚みを $L(= 10\ \mathrm{cm})$，ブロックをつないでいるばねのばね定数を $k(= 900\ \mathrm{N/m})$ とおく．

1. 弾丸がブロックから飛び出た直後のブロックの速度を V_0 とする．このあと，ブロックが右に $x_0(= 5\ \mathrm{cm})$ だけ動いたとすると，

$$\frac{M}{2}V_0^2 = \frac{k}{2}x_0^2$$

が成り立つ．したがって，

$$V_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}x_0 = 1.5\ \mathrm{m/s} \tag{20}$$

2. 弾丸が失った運動量をブロックが受け取るので

$$m(v_0 - v_1) = MV_0 \to v_1 = v_0 - \frac{\sqrt{kM}}{m}x_0 = 100\ \mathrm{m/s} \tag{21}$$

3. 弾丸が受けた力積は $m(v_1 - v_0) = -1.5\ \mathrm{N \cdot s}$（弾丸の進行方向を正にとって）．

4. 水平方向に x 軸をとり，弾丸の位置を x で表す．ブロックの左端を $x = 0$ とし，$x = 0$ となる時刻を $t = 0$ とする．また弾丸がブロックから飛び出した時刻を T とする．弾丸がブロック内で等加速度運動するとして、その加速度を a とおくと，

$$\begin{aligned}\ddot{x}(t) &= a\\ \dot{x}(t) &= at + v_0\\ x(t) &= \frac{a}{2}t^2 + v_0 t\end{aligned}$$

$t = T$ での条件から，

$$\dot{x}(T) = aT + v_0 = v_1 \qquad x(T) = \frac{a}{2}T^2 + v_0 T = L$$

が成り立つ．この 2 式を a, T について解けば，

$$a = -\frac{v_0^2 - v_1^2}{2L} = -7.5 \times 10^5\ \mathrm{m/s^2} \tag{22}$$

$$T = \frac{2L}{v_1 + v_0} = 4.0 \times 10^{-4}\ \mathrm{s} \tag{23}$$

を得る．

5. 弾丸がブロックを貫通するときに等加速度運動をしていたとすると，その間ブロックは弾丸から一定の力 ma を受けていたことになる．いまの場合 $ma \sim 10^3$ N 程度である．一方，もしこのときブロックが弾丸に押されて動いていたとしても，数 cm 程度であると考えられるので，そのときばねから受ける力は数 N 程度であり，衝突力に比べ十分小さい．

III-9 単振子を貫通する弾丸　1. 弾丸が失った運動量を振子が得るので，

$$\frac{m}{2}v = MV_0 \to V_0 = \frac{m}{2M}v \tag{24}$$

2. 振子の速さを V で表すと

$$E = \frac{MV^2}{2} - Mgl\cos\theta = \frac{Ml^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - Mgl\cos\theta$$

は時間によらず一定である（演習問題 II-7 参照）．従って，ひもと鉛直軸との角度が θ のときの速さは

$$\frac{MV^2}{2} - Mgl\cos\theta = \frac{MV_0^2}{2} - Mgl \qquad \longrightarrow \qquad |V| = \sqrt{\frac{m^2}{4M^2}v^2 + 2gl(\cos\theta - 1)} \tag{25}$$

である．根号の中が正であるという条件が，運動が可能な θ の範囲を決めているので，根号の中が負になるのではないかという心配はない．

3. 演習問題 II-7 でもやったように，単振子のひもの張力は

$$T = Ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + Mg\cos\theta$$

と表される．この第一項は $E =$ 一定であることから，

$$Ml\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{l} + 2Mg\cos\theta = \frac{M}{l}V_0^2 - 2Mg + 2Mg\cos\theta$$

である．したがって，張力の大きさは

$$T = \frac{M}{l}V_0^2 - Mg(2 - 3\cos\theta) \tag{26}$$

4. ひもがたるむことなく振子が一回転するためにはすべての $\theta \in [0, 2\pi)$ で $T > 0$ であればよい．さらにすべての $\theta \in [0, 2\pi)$ で $T > 0$ であれば，$|V|$ の根号の中は正であるので，結局ひもがたるむことなく振子が一回転するためにはすべての $\theta \in [0, 2\pi)$ で $T > 0$ が成り立つことが必要十分である．すべての $\theta \in [0, 2\pi)$ で

$$\frac{M}{l}V_0^2 - Mg(2 - 3\cos\theta) > 0 \qquad \longrightarrow \qquad V_0^2 > gl(2 - 3\cos\theta)$$

を満たすような $|V_0|$ のうち，最小のものを求めればよい．$\theta \in [0, 2\pi)$ では $gl(2 - 3\cos\theta) \leq 5gl$（等号成立は $\theta = \pi$ のとき）と評価できるので，求める $|V_0|$ の最小値は $\sqrt{5gl}$ である．

III-10 単振子と弾丸の完全非弾性衝突 1. 孤立系で非保存力が仕事をしないとき，力学的エネルギーが保存するので (ア)$t < t_\mathrm{i}$，(ウ)$t > t_\mathrm{f}$ では力学的エネルギーは保存する．

2. t_f でおもりが最下点にあるときと，おもりが h だけ高いところで静止したときとでエネルギーは保存しているので，

$$\frac{(m+M)v_\mathrm{f}^2}{2} = (m+M)gh \qquad \longrightarrow \qquad v_\mathrm{f} = \sqrt{2gh} = 1.1\ \mathrm{m/s} \tag{27}$$

である．

3. $t = t_\mathrm{i}$ と $t = t_\mathrm{f}$ で全運動量が保存しているので，

$$mv_\mathrm{i} = (m+M)v_\mathrm{f} \qquad \longrightarrow \qquad v_\mathrm{i} = \frac{m+M}{m}\sqrt{2gh} \simeq \frac{M\sqrt{2gh}}{m} = 6.3 \times 10^2\ \mathrm{m/s} \tag{28}$$

4. 水平方向に x 軸をとり，弾丸の位置を x で表す．弾丸がおもりにあたる時間を $t = 0$ とし，そのときの位置を $x(0) = 0$ とする．弾丸が $x = d$ に進むまで，等加速度運動しているとし，その加速度を a とすると，$x(t)$ は

$$x(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_\mathrm{i}t$$

と表される．弾丸が d だけ進んだ時刻を T とすると，

$$
\begin{aligned}
&aT + v_{\mathrm{i}} = v_{\mathrm{f}} \\
&\frac{a}{2}T^2 + v_{\mathrm{i}}T = d
\end{aligned}
$$

これを解いて，

$$
a = -\frac{v_{\mathrm{i}}^2 - v_{\mathrm{f}}^2}{2d} \simeq -\frac{v_{\mathrm{i}}^2}{2d} \simeq -\frac{M^2 gh}{m^2 d} = -6.6 \times 10^6\ \mathrm{m/s^2} \tag{29}
$$

$$
T = \frac{2d}{v_{\mathrm{i}} + v_{\mathrm{f}}} \simeq \frac{2d}{v_{\mathrm{i}}} \simeq \frac{2md\sqrt{2gh}}{M} = 1.2 \times 10^{-4}\mathrm{s} \tag{30}
$$

を得る．

5. 衝突中に弾丸が失った運動量をおもりが受け取るので，上記の加速度 a を用いて，$-ma = 6.3 \times 10^4$ N だけの力を受ける．
6. おもりにはたらく重力は $Mg = 53$ N で衝突力に比べて十分小さい．