

力学 B 演習問題 II 解答例 2013.07.14 (TA:越田)

II-1 摩擦力 図1のように、フライパンに乗った卵焼きを斜面上の物体で表す。卵焼きにかかる力は、重力、垂直抗力、摩擦力であり、それぞれの大きさを G, N, F と書く。卵焼きがフライパンの上で静止しているための必要十分条件は、静止摩擦係数を μ_s として、 $F \leq \mu_s N$ が成り立つことである。力がつりあっていることから、 $F = G \sin \theta, N = G \cos \theta$ が成り立つことに注意すれば、静止しているための必要十分条件は

$$\tan \theta \leq \mu_s \quad (1)$$

であることが分かる。したがって、 $\tan \theta = 0.05 \rightarrow \theta = 0.05 \text{ rad}$ だけ傾けると、卵焼きは滑り出す。ここで、 $\theta \ll 1$ のとき、 $\tan \theta \simeq \theta$ とできることを用いた。

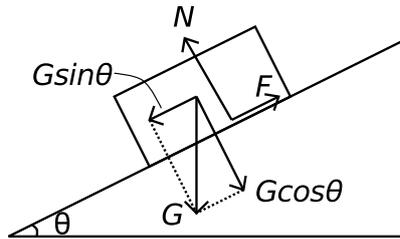


図1 フライパンにのった卵焼き。

II-2 等速円運動 車体の質量を m 、コースの半径を R とする。円弧状のコースの中心のまわりに角速度 $\omega = v/R$ で回転する座標系から車体を見ると、車体はコースの頂上を等速で通過する瞬間、静止して、加速度が0になる。そのとき、回転する座標系から見て、車体にかかる力は重力 mg (g : 重力加速度)、遠心力 $m\omega^2 R$ 、垂直抗力 N であるが、これらは釣り合っている (図2)。したがって、求める力 N は

$$N = m\omega^2 R - mg = m \frac{v^2}{R} - mg \quad (2)$$

いま、 $m = 1200 \text{ kg}$ 、 $R = 20 \text{ m}$ 、 $v = 15 \text{ m/s}$ と与えられているので、重力加速度を $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ とすれば、 $N = 1740 \text{ N}$ である。

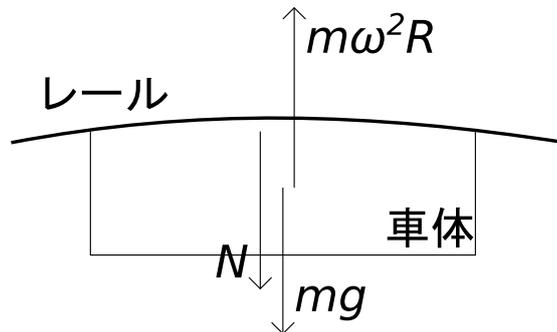


図2 車体にかかる力 (回転座標系からみて)。

[実験室系から見た解法]

円弧状のコースの中心を原点として、水平方向に x 軸、鉛直方向に y 軸をとる。このとき、車体の位置を $\mathbf{r} = (R \cos \theta(t), R \sin \theta(t))$ で表すことができる。車体の加速度は

$$\ddot{\mathbf{r}} = R \begin{pmatrix} -\cos \theta(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 - \sin \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) \\ -\sin \theta(t) \cdot (\dot{\theta}(t))^2 + \cos \theta(t) \cdot \ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} \quad (3)$$

である。車体が頂上を等速 v で通過する時刻を t_0 とすると、 $\theta(t_0) = \pi/2, \dot{\theta}(t_0) = v/R, \ddot{\theta}(t_0) = 0$ であるので、運動方程式は

$$m\ddot{\mathbf{r}}(t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{v}{R}\right)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -N - mg \end{pmatrix} \quad (4)$$

と書かれる。ここから

$$N = m\frac{v^2}{R} - mg \quad (5)$$

が得られる。

II-3 等速円運動 おもりの質量を m 、ひもの長さを L とする。このとき、回転軸状でひもがつながった2点の間の距離も L である。おもりと回転軸の距離を R とおく。もちろん $R = L \times \sqrt{3}/2$ である。おもりが回転軸の周りを角速度 ω で回転しているとする。このとき、回転軸のまわりを角速度 ω で回転する座標系から見ると、おもりは静止している。おもりが静止した座標系からみて、おもりにかかる力を図3に示す。ただし上のひもの張力を T_1 、下のひもの張力を T_2 で表し、重力加速度は g と書く。このとき、力のつりあいを考えると

$$mg + T_2 \sin \frac{\pi}{6} = T_1 \sin \frac{\pi}{6} \quad (6)$$

$$m\omega^2 R = T_1 \cos \frac{\pi}{6} + T_2 \cos \frac{\pi}{6} \quad (7)$$

が成り立つことがわかる。第1式から

$$T_2 = T_1 - 2mg \quad (8)$$

が得られ、これと第2式から

$$\omega^2 = \frac{\sqrt{3}(T_1 - mg)}{mR} \quad (9)$$

を得る。

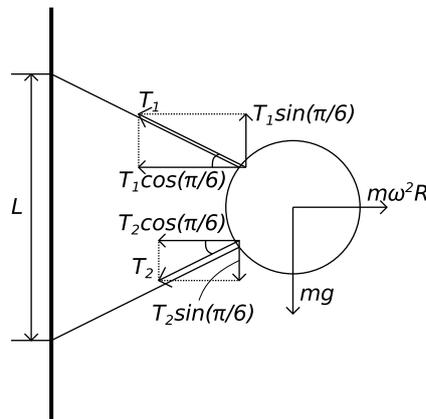


図3 おもりにかかる力 (回転座標系からみて)。

$m = 1.0 \text{ kg}$, $L = 1.7 \text{ m}$, $T_1 = 35 \text{ N}$, $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ として、具体的に数値を計算する。

1. $T_2 = 15.4 \text{ N}$.
2. おもりが静止した座標系からみれば、力はつりあっている。おもりが角速度 ω で回転する座標系からみると、回転軸方向に $m\omega^2 R$ だけの力がはたらく。
3. 角速度は $\omega = 5.44 \text{ s}^{-1}$ 。速さは $v = R\omega = 8.02 \text{ m/s}$ 。

[実験室系から見た解法]

鉛直方向は力が釣りあっている。前問と同様に、物体の回転する面内に直交座標を入れて、物体の位置を $\mathbf{r} = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$ と表せば、運動方程式から

$$m\omega^2 R = T_1 \cos \frac{\pi}{6} + T_2 \cos \frac{\pi}{6} \quad (10)$$

が得られる。あとは上と同様である。

II-4 等速円運動 物体が速さ v で、半径 R の円周上を運動するとき、その角速度は $\omega = v/R$ である。物体がひもからうける張力の大きさを T で表すことにする。

1. 物体が静止した座標系で見ると、物体にはたらく力は、重力、ひもからの張力、遠心力である。(図4)
2. 物体が静止した座標系では、加速度は0である。物体が角速度 ω で回転する座標系では、加速度 a は回転の中心を向いている。(図5)
3. 図4から鉛直方向の力のつりあいとして、

$$T \cos \theta = mg \quad (11)$$

が成り立つことが分かる。したがって張力の大きさ T は

$$T = \frac{mg}{\cos \theta} \quad (12)$$

と表される。

4. 図4から水平方向の力のつりあいとして、

$$T \sin \theta = m\omega^2 R \quad (13)$$

が成り立つ。角速度と速さが $v = \omega R$ と関係付けられることから

$$\omega^2 = \frac{T \sin \theta}{mR} = \frac{g}{R} \tan \theta \rightarrow v = \sqrt{Rg \tan \theta} \quad (14)$$

と表される。

5. 周期 $\tau = 2\pi/\omega$ は

$$\tau = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \tan \theta}} \quad (15)$$

と表される。

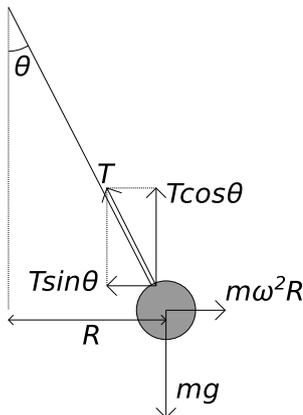


図4 物体にはたらく力 (物体が静止した座標系からみて)。

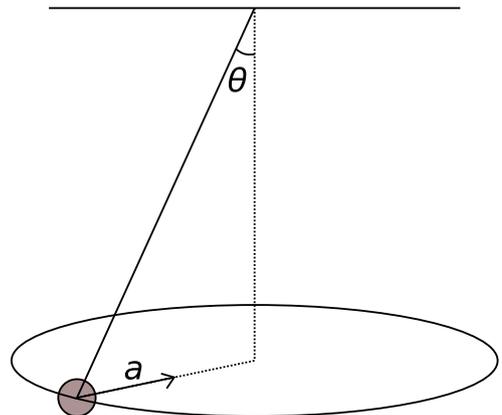


図5 物体の加速度。

[実験室系から見た解法]

物体の回転面内に直角座標系をとって、物体の位置は $\mathbf{r} = (R \cos \omega t, R \sin \omega t)$ と表される。運動方程式から

$$m\omega^2 R = T \sin \theta \quad (16)$$

が得られる。

II-5 等速円運動 物体が回転台に対して滑っていないとき、回転台と一緒に回る座標系でみると物体は静止している。そのとき物体にはたらく力は、重力 mg 、遠心力 $m\omega^2 r$ 、抗力 N 、摩擦力 F である。(図6) 力のつりあいを考えると

$$N = mg \quad (17)$$

$$F = m\omega^2 r \quad (18)$$

が成り立つ。物体が回転台に対して滑らないことは $F \leq \mu_s N$ 、すなわち

$$m\omega^2 r \leq \mu_s mg \longrightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{\mu_s g}{r}} \quad (19)$$

が成り立つことと同値である。したがって、求める ω_M は

$$\omega_M = \sqrt{\frac{\mu_s g}{r}} \quad (20)$$

である。

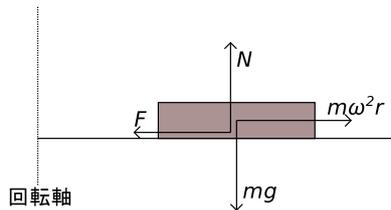


図6 回転台の上の物体.

[実験室系からみた解法]

鉛直方向の力はつりあっているので、 $N = mg$ になりたっている。回転面内に直角座標をとって、物体の位置を $\mathbf{r} = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ で表すと、運動方程式から

$$m\omega^2 r = F \quad (21)$$

が得られる。物体が滑らないのは $F \leq \mu_s N$ が成り立っているときである。

II-6 ローター

1. 壁と一緒に角速度 ω で回転する座標系では、人は静止しており、人にかかる力は、重力 Mg 、遠心力 $M\omega^2 r$ 、垂直抗力 N 、摩擦力 F である。
2. 図7
3. 回転座標系から見れば、加速度は0である。人が角速度 ω で等速円運動する座標系から見れば、その角速度は $\omega^2 r$ である。
4. 垂直抗力 N は遠心力とつりあっているので

$$N = M\omega^2 r \quad (22)$$

である。

5. 摩擦力が重力とつりあっているので $F = Mg$ が成り立つ。ここで、 $F \leq \mu_s N$ が成り立っていれば回転座標系で人は静止していただける。すなわち、

$$Mg \leq \mu_s N = \mu_s M\omega^2 r \rightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}} \quad (23)$$

が成り立っていれば人は壁に押し付けられる。したがって求める ω_m は

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}} \quad (24)$$

である。

6. $\mu_s = 0.3, r = 2.1 \text{ m}$ のとき、 $\omega_m = 3.94 \text{ s}^{-1}$

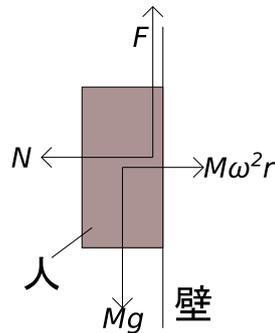


図7 壁に押し付けられた人。

[実験室系から見た解法]

回転面内に直交座標系をとって、人の位置を $\mathbf{r} = (r \cos \omega t, r \sin \omega t)$ で表すと、運動方程式から

$$M\omega^2 r = N \quad (25)$$

である。鉛直方向の力はつりあっているので $F = mg$ が成り立つ。人が落ちないのは $F \leq \mu_s N$ が成り立つときである。

II-7 単振り子 与えられているのは

$$ml \frac{d^2 \theta}{dt^2}(t) + mg \sin \theta(t) = 0 \quad (26)$$

$$ml \left(\frac{d\theta}{dt}(t) \right)^2 = T(t) - mg \cos \theta(t) \quad (27)$$

である。

- 1.

$$E(t) = \frac{mv(t)^2}{2} + mgy(t) = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}(t) \right)^2 - mgl \cos \theta(t) \quad (28)$$

とおく。このとき

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= ml^2 \frac{d\theta}{dt}(t) \frac{d^2 \theta}{dt^2}(t) + mgl \sin \theta(t) \frac{d\theta}{dt}(t) \\ &= l \frac{d\theta}{dt}(t) \left(ml \frac{d^2 \theta}{dt^2}(t) + mg \sin \theta(t) \right) \end{aligned} \quad (29)$$

であるが、式(26)より、この右辺は0である。したがって、 $E(t)$ は一定である。

2. $E(t_1) = E(0)$ を用いる.

$$E(0) = -mgl \cos \theta_0 \quad (30)$$

$$E(t_1) = \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}(t_1) \right)^2 - mgl \quad (31)$$

であるから,

$$\begin{aligned} \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}(t_1) \right)^2 - mgl &= -mgl \cos \theta_0 \\ \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}(t_1) \right)^2 &= mgl(1 - \cos \theta_0) \\ l \left| \frac{d\theta}{dt}(t_1) \right| &= \sqrt{2gl(1 - \cos \theta_0)} \end{aligned} \quad (32)$$

したがって, 時刻 t_1 での速さは $\sqrt{2gl(1 - \cos \theta_0)}$ である.

3. 式 (27) から,

$$T(t_1) = ml \left(\frac{d\theta}{dt}(t_1) \right)^2 + mg \quad (33)$$

前問の結果を用いると,

$$\begin{aligned} T(t_1) &= ml \frac{1}{l^2} 2gl(1 - \cos \theta_0) + mg \\ &= mg(3 - 2 \cos \theta_0) \end{aligned} \quad (34)$$

を得る.

4. $t > 0$ で $E(t) = E(0)$ を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{ml^2}{2} \left(\frac{d\theta}{dt}(t) \right)^2 - mgl \cos \theta(t) &= -mgl \cos \theta_0 \\ ml \left(\frac{d\theta}{dt}(t) \right)^2 &= 2mg(\cos \theta(t) - \cos \theta_0) \end{aligned} \quad (35)$$

式 (27) より, 張力 T は

$$\begin{aligned} T(t) &= 2mg(\cos \theta(t) - \cos \theta_0) + mg \cos \theta(t) \\ &= mg(3 \cos \theta(t) - 2 \cos \theta_0) \end{aligned} \quad (36)$$

と表される. $\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0], \theta_0 \in (0, \pi/2)$ のとき, $\cos \theta(t) \geq \cos \theta_0$ であるので,

$$T(t) \geq mg \cos \theta_0 > 0 \quad (37)$$

である.

II-8 運動エネルギー 質量 m の物体が速さ v で運動しているときの運動エネルギーは $mv^2/2$ である. ただし, $1 \text{ J} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ であることに注意する.

1.

$$\frac{80 \times 10^2}{2} = 4000 \text{ J}$$

2.

$$\frac{145 \times 10^{-3} \times \left(\frac{155 \times 10^3}{3600} \right)^2}{2} = 134 \text{ J}$$

3.

$$\frac{10 \times 10^3 \times (15 \times 10^3)^2}{2} = 1.13 \times 10^{12} \text{ J}$$