# 力学 B 演習問題 II 解答例 2013.07.14（TA:越田)

**II-1 摩擦力**　図 1 のように，フライパンに乗った卵焼きを斜面上の物体で表す．卵焼きにかかる力は，重力，垂直抗力，摩擦力であり，それぞれの大きさを $G, N, F$ と書く．卵焼きがフライパンの上で静止しているための必要十分条件は，静止摩擦係数を $\mu_s$ として，$F \leq \mu_{\mathrm{s}} N$ が成り立つことである．力がつりあっていることから，$F = G\sin\theta, N = G\cos\theta$ が成り立つことに注意すれば，静止しているための必要十分条件は

$$\tan\theta \leq \mu_{\mathrm{s}} \tag{1}$$

であることが分かる．したがって，$\tan\theta = 0.05 \to \theta = 0.05$ rad だけ傾けると，卵焼きは滑り出す．ここで，$\theta \ll 1$ のとき，$\tan\theta \simeq \theta$ とできることを用いた．

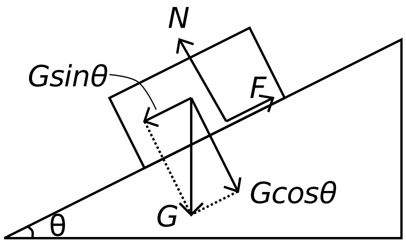


図 1　フライパンにのった卵焼き．

**II-2 等速円運動**　車体の質量を $m$，コースの半径を $R$ とする．円弧状のコースの中心のまわりに角速度 $\omega = v/R$ で回転する座標系から車体を見ると，車体はコースの頂上を等速で通過する瞬間，静止して，加速度が 0 になる．そのとき，回転する座標系から見て，車体にかかる力は重力 $mg$ ($g$: 重力加速度)，遠心力 $m\omega^2 R$，垂直抗力 $N$ であるが，これらは釣り合っている（図 2)．したがって，求める力 $N$ は

$$N = m\omega^2 R - mg = m\frac{v^2}{R} - mg \tag{2}$$

いま，$m = 1200$ kg，$R = 20$ m，$v = 15$ m/s と与えられているので，重力加速度を $g = 9.8$ m/s$^2$ とすれば，$N = 1740$ N である．

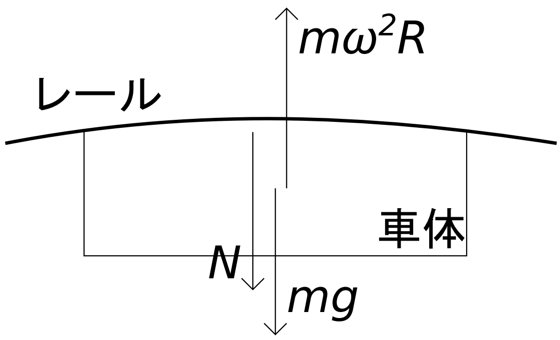


図 2　車体にかかる力（回転座標系からみて)．

[実験室系から見た解法]

円弧状のコースの中心を原点として，水平方向に $x$ 軸，鉛直方向に $y$ 軸をとる．このとき，車体の位置を $\boldsymbol{r} = (R\cos\theta(t), R\sin\theta(t))$ で表すことができる．車体の加速度は

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = R\begin{pmatrix} -\cos\theta(t)\cdot(\dot{\theta}(t))^2 - \sin\theta(t)\cdot\ddot{\theta}(t) \\ -\sin\theta(t)\cdot(\dot{\theta}(t))^2 + \cos\theta(t)\cdot\ddot{\theta}(t) \end{pmatrix} \tag{3}$$

である．車体が頂上を等速 $v$ で通過する時刻を $t_0$ とすると，$\theta(t_0)=\pi/2, \dot{\theta}(t_0)=v/R, \ddot{\theta}(t_0)=0$ であるので，運動方程式は

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}(t_0)=\begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\frac{v}{R}\right)^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ -N-mg \end{pmatrix} \tag{4}$$

と書かれる．ここから

$$N=m\frac{v^2}{R}-mg \tag{5}$$

が得られる．

**II-3 等速円運動**　おもりの質量を $m$，ひもの長さを $L$ とする．このとき，回転軸状でひもがつながった 2 点の間の距離も $L$ である．おもりと回転軸の距離を $R$ とおく．もちろん $R=L\times\sqrt{3}/2$ である．おもりが回転軸の周りを角速度 $\omega$ で回転しているとする．このとき，回転軸のまわりを角速度 $\omega$ で回転する座標系から見ると，おもりは静止している．おもりが静止した座標系からみて，おもりにかかる力を図 3 に示す．ただし上のひもの張力を $T_1$，下のひもの張力を $T_2$ で表し，重力加速度は $g$ と書く．このとき，力のつりあいを考えると

$$mg+T_2\sin\frac{\pi}{6}=T_1\sin\frac{\pi}{6} \tag{6}$$

$$m\omega^2R=T_1\cos\frac{\pi}{6}+T_2\cos\frac{\pi}{6} \tag{7}$$

が成り立つことがわかる．第 1 式から

$$T_2=T_1-2mg \tag{8}$$

が得られ，これと第 2 式から

$$\omega^2=\frac{\sqrt{3}(T_1-mg)}{mR} \tag{9}$$

を得る．

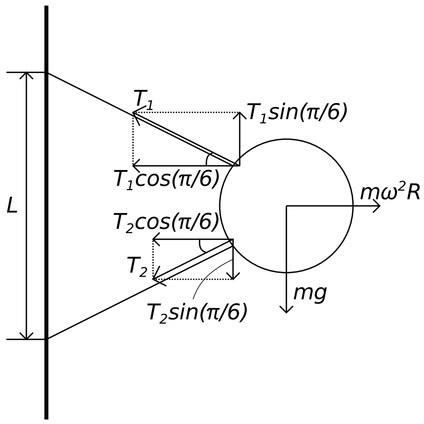


図 3　おもりにかかる力（回転座標系からみて）．

$m=1.0$ kg，$L=1.7$ m，$T_1=35$ N，$g=9.8$ m/s$^2$ として，具体的に数値を計算する．

1. $T_2=15.4$ N．
2. おもりが静止した座標系からみれば，力はつりあっている．おもりが角速度 $\omega$ で回転する座標系からみると，回転軸方向に $m\omega^2R$ だけの力がはたらく．
3. 角速度は $\omega=5.44$ s$^{-1}$．速さは $v=R\omega=8.02$ m/s.

[実験室系から見た解法]

鉛直方向は力がつりあっている．前問と同様に，物体の回転する面内に直交座標を入れて，物体の位置を $\boldsymbol{r} = (R\cos\omega t, R\sin\omega t)$ と表せば，運動方程式から

$$m\omega^2 R = T_1 \cos\frac{\pi}{6} + T_2 \cos\frac{\pi}{6} \tag{10}$$

が得られる．あとは上と同様である．

**II-4 等速円運動**　物体が速さ $v$ で，半径 $R$ の円周上を運動するとき，その角速度は $\omega = v/R$ である．物体がひもからうける張力の大きさを $T$ で表すことにする．

1. 物体が静止した座標系で見ると，物体にはたらく力は，重力，ひもからの張力，遠心力である．(図 4)
2. 物体が静止した座標系では，加速度は 0 である．物体が角速度 $\omega$ で回転する座標系では，加速度 $a$ は回転の中心を向いている．(図 5)
3. 図 4 から鉛直方向の力のつりあいとして，

$$T\cos\theta = mg \tag{11}$$

が成り立つことが分かる．したがって張力の大きさ $T$ は

$$T = \frac{mg}{\cos\theta} \tag{12}$$

と表される．

4. 図 4 から水平方向の力のつりあいとして，

$$T\sin\theta = m\omega^2 R \tag{13}$$

が成り立つ．角速度と速さが $v = \omega R$ と関係付けられることから

$$\omega^2 = \frac{T\sin\theta}{mR} = \frac{g}{R}\tan\theta \longrightarrow v = \sqrt{Rg\tan\theta} \tag{14}$$

と表される．

5. 周期 $\tau = 2\pi/\omega$ は

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g\tan\theta}} \tag{15}$$

と表される．

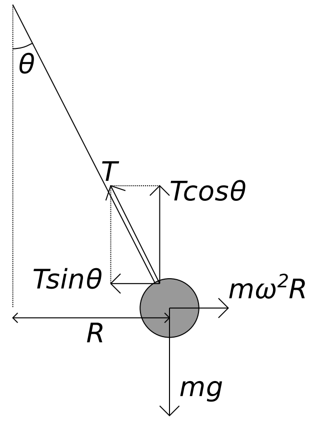

図 4　物体にはたらく力（物体が静止した座標系からみて）．

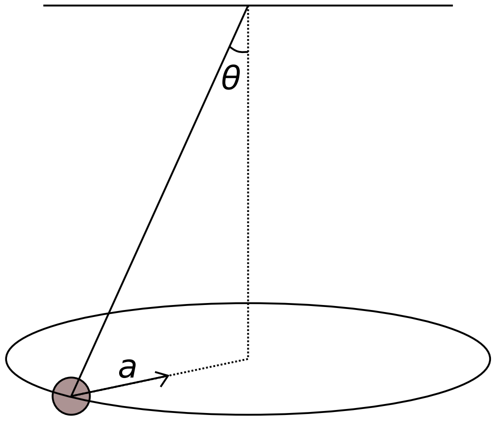

図 5　物体の加速度．

[実験室系から見た解法]

物体の回転面内に直交座標系をとって，物体の位置は $\boldsymbol{r} = (R\cos\omega t, R\sin\omega t)$ と表される．運動方程式から

$$m\omega^2 R = T\sin\theta \tag{16}$$

が得られる．

**II-5 等速円運動**　物体が回転台に対して滑っていないとき，回転台と一緒に回る座標系でみると物体は静止している．そのとき物体にはたらく力は，重力 $mg$，遠心力 $m\omega^2 r$，抗力 $N$，摩擦力 $F$ である．(図 6) 力のつりあいを考えると

$$N = mg \tag{17}$$
$$F = m\omega^2 r \tag{18}$$

が成り立つ．物体が回転台に対して滑らないことは $F \leq \mu_{\mathrm{s}} N$，すなわち

$$m\omega^2 r \leq \mu_{\mathrm{s}} mg \longrightarrow \omega \leq \sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{s}} g}{r}} \tag{19}$$

が成り立つことと同値である．したがって，求める $\omega_{\mathrm{M}}$ は

$$\omega_{\mathrm{M}} = \sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{s}} g}{r}} \tag{20}$$

である．

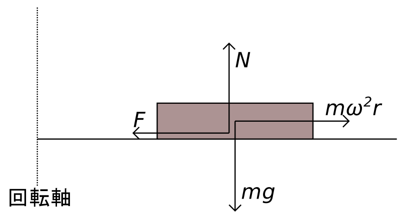


図 6　回転台の上の物体.

[実験室系からみた解法]

鉛直方向の力はつりあっているので，$N = mg$ がなりたっている．回転面内に直交座標をとって，物体の位置を $\boldsymbol{r} = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ で表すと，運動方程式から

$$m\omega^2 r = F \tag{21}$$

が得られる．物体が滑らないのは $F \leq \mu_{\mathrm{s}} N$ が成り立っているときである．

**II-6 ローター**

1. 壁と一緒に角速度 $\omega$ で回転する座標系では，人は静止しており，人にかかる力は，重力 $Mg$，遠心力 $M\omega^2 r$，垂直抗力 $N$，摩擦力 $F$ である．
2. 図 7
3. 回転座標系から見れば，加速度は 0 である．人が角速度 $\omega$ で等速円運動する座標系から見れば，その角速度は $\omega^2 r$ である．
4. 垂直抗力 $N$ は遠心力とつりあっているので

$$N = M\omega^2 r \tag{22}$$

である．

5. 摩擦力が重力とつりあっているので $F = Mg$ が成り立つ．ここで，$F \leq \mu_{\mathrm{s}} N$ が成り立っていれば回転座標系で人は静止していられる．すなわち，

$$Mg \leq \mu_{\mathrm{s}} N = \mu_{\mathrm{s}} M\omega^2 r \longrightarrow \omega \geq \sqrt{\frac{g}{\mu_{\mathrm{s}} r}} \tag{23}$$

が成り立っていれば人は壁に押し付けられる．したがって求める $\omega_{\mathrm{m}}$ は

$$\omega_{\mathrm{m}} = \sqrt{\frac{g}{\mu_{\mathrm{s}} r}} \tag{24}$$

である．

6. $\mu_{\mathrm{s}} = 0.3, r = 2.1\ \mathrm{m}$ のとき，$\omega_{\mathrm{m}} = 3.94\ \mathrm{s}^{-1}$

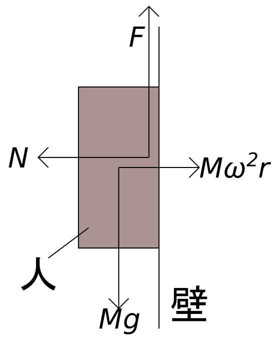


図 7　壁に押し付けられた人．

[実験室系から見た解法]

回転面内に直交座標系をとって，人の位置を $\boldsymbol{r} = (r\cos\omega t, r\sin\omega t)$ で表すと，運動方程式から

$$M\omega^2 r = N \tag{25}$$

である．鉛直方向の力はつりあっているので $F = mg$ が成り立つ．人が落ちないのは $F \leq \mu_{\mathrm{s}} N$ が成り立つときである．

**II-7 単振り子**　与えられているのは

$$ml\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + mg\sin\theta(t) = 0 \tag{26}$$

$$ml\left(\frac{d\theta}{dt}(t)\right)^2 = T(t) - mg\cos\theta(t) \tag{27}$$

である．

1.

$$E(t) = \frac{mv(t)^2}{2} + mgy(t) = \frac{ml^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}(t)\right)^2 - mgl\cos\theta(t) \tag{28}$$

とおく．このとき

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt}(t) &= ml^2\frac{d\theta}{dt}(t)\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + mgl\sin\theta(t)\frac{d\theta}{dt}(t) \\ &= l\frac{d\theta}{dt}(t)\left(ml\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) + mg\sin\theta(t)\right)\end{aligned} \tag{29}$$

であるが，式 (26) より，この右辺は 0 である．したがって，$E(t)$ は一定である．

2. $E(t_1) = E(0)$ を用いる．

$$E(0) = -mgl\cos\theta_0 \tag{30}$$
$$E(t_1) = \frac{ml^2}{2}\Big(\frac{d\theta}{dt}(t_1)\Big)^2 - mgl \tag{31}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
\frac{ml^2}{2}\Big(\frac{d\theta}{dt}(t_1)\Big)^2 - mgl &= -mgl\cos\theta_0 \\
\frac{ml^2}{2}\Big(\frac{d\theta}{dt}(t_1)\Big)^2 &= mgl(1-\cos\theta_0) \\
l\Big|\frac{d\theta}{dt}(t_1)\Big| &= \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)} \qquad (32)
\end{aligned}$$

したがって，時刻 $t_1$ での速さは $\sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}$ である．

3. 式 (27) から，

$$T(t_1) = ml\Big(\frac{d\theta}{dt}(t_1)\Big)^2 + mg \tag{33}$$

前問の結果を用いると，

$$\begin{aligned}
T(t_1) &= ml\frac{1}{l^2}2gl(1-\cos\theta_0) + mg \\
&= mg(3 - 2\cos\theta_0) \qquad (34)
\end{aligned}$$

を得る．

4. $t > 0$ で $E(t) = E(0)$ を用いると，

$$\begin{aligned}
\frac{ml^2}{2}\Big(\frac{d\theta}{dt}(t)\Big)^2 - mgl\cos\theta(t) &= -mgl\cos\theta_0 \\
ml\Big(\frac{d\theta}{dt}(t)\Big)^2 &= 2mg(\cos\theta(t) - \cos\theta_0) \qquad (35)
\end{aligned}$$

式 (27) より，張力 $T$ は

$$\begin{aligned}
T(t) &= 2mg(\cos\theta(t) - \cos\theta_0) + mg\cos\theta(t) \\
&= mg(3\cos\theta(t) - \cos\theta_0) \qquad (36)
\end{aligned}$$

と表される．$\theta(t) \in [-\theta_0, \theta_0], \theta_0 \in (0, \pi/2)$ のとき，$\cos\theta(t) \geq \cos\theta_0$ であるので，

$$T(t) \geq 2mg\cos\theta_0 > 0 \tag{37}$$

である．

**II-8 運動エネルギー**　質量 $m$ の物体が速さ $v$ で運動しているときの運動エネルギーは $mv^2/2$ である．ただし，1 J=1 kg·m$^2$·s$^{-2}$ であることに注意する．

1. $$\frac{80 \times 10^2}{2} = 4000 \text{ J}$$

2. $$\frac{145 \times 10^{-3} \times (\frac{155\times10^3}{3600})^2}{2} = 134 \text{ J}$$

3. $$\frac{10 \times 10^3 \times (15 \times 10^3)^2}{2} = 1.13 \times 10^{12} \text{ J}$$