力学 B 演習問題 IV 解答例 2013.08.17（TA:越田)

第 1 問　リングを微小区間に分割する．

$$\Delta\ :\ 0=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_{i-1}<\theta_i<\cdots<\theta_n=2\pi \tag{1}$$

この分割は等間隔である必要はない．また $\delta(\Delta)=\max_{1\leq i\leq n}\{\theta_i-\theta_{i-1}\}$ とおく．
i 番目の区間 $[\theta_{i-1},\theta_i]$ の部分の質量 m_i は，質量の分布が一定であることから，

$$m_i=\frac{\theta_i-\theta_{i-1}}{2\pi}M \tag{2}$$

である．
リングの慣性モーメント I は

$$I=\sum_{i=0}^{n}m_ia^2=\sum_{i=0}^{n}(\theta_i-\theta_{i-1})\frac{Ma^2}{2\pi} \tag{3}$$

と表される．ここで，$n\to\infty$, $\delta(\Delta)\to 0$ の極限をとると（つまり，無限に細かい分割を行うと)，和は積分に移行し，$\sum_i(\theta_i-\theta_{i-1})\to\int_0^{2\pi}d\theta$ となる．より厳密には (3) は Riemann 和の形になっている．このとき，$\delta(\Delta)\to 0$ の極限をとると，分割 Δ のやり方によらず，Rieman 和は Riemann 積分に移行する．したがって，

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\frac{Ma^2}{2\pi}=Ma^2 \tag{4}$$

を得る．

補足 (Riemann 積分)　第 1 問で使った Riemann 積分について紹介する[*1]．閉区間 $I=[a,b]$ $(a<b)$ 上で定義された実数値関数 f を考える．まず，区間 I を n 個の区間に分割する:

$$\Delta:\ a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$$

すなわち，区間 I の中に $n-1$ 個の点 x_1, x_2 $\cdots$, x_{n-1} をとり，I を n 個の区間 $\{I_k=[x_{k-1},x_k]\}_{k=1,\cdots,n}$ に分割する．このとき，$\delta(\Delta)=\max_{1\leq k\leq n}\{x_k-x_{k-1}\}$ を分割 Δ の幅と呼ぶ．区間 I_k から任意に一点 ξ_k をとり，これを代表点と呼ぶ．そして，

$$s(f,I,\Delta,\{\xi_k\})=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})f(\xi_k)$$

によって定義される和を **Riemann 和**と呼ぶ．当然，Riemann 和は分割 Δ のやり方や代表点 $\{\xi_k\}$ の取り方に依っている．もし，

$$\lim_{\delta(\Delta)\to 0}s(f,I,\Delta,\{\xi_k\})=J(f,I)$$

が存在して，しかもその極限値が Δ, $\{\xi_k\}$ に依らないとき，**f は I 上で Riemann 可積分である**という．そのときの極限値 $J(f,I)$ を **Riemann 積分**と呼び，

$$J(f,I)=\int_a^b dxf(x)$$

と書く．
特に，f が I 上の連続関数であるとき，Riemann 可積分であることが証明される．Riemann 積分の計算自体は（関数が Riemann 可積分であれば)，高等学校で習ったようにやればよい．

*1 詳細は例えば，杉浦光夫，「解析入門 I」（東京大学出版会，基礎数学２）の第 IV 章を参照．

第２問　円盤の半径方向の区間 $[0,a]$ のなかから任意に一点 $b\in[0,a]$ をとる．さらに，区間 $[b,a]$ を分割する．

$$\Delta\ :\ b=r_0<r_1<\cdots<r_{i-1}<r_i<\cdots<r_n=a \tag{5}$$

さらに，$\delta(\Delta)=\max_{1\le i\le n}\{r_i-r_{i-1}\}$ とおく．円盤のうち，半径 r が $r\le b$ の部分を P_0 ，$r\in(r_{i-1},r_i]$ にある部分を P_i とし，P_i の部分の慣性モーメントを I_i とする．このとき円盤の慣性モーメントは I は $I=\sum_{i=0}^n I_i$ と表される．P_0 は円盤状，P_i ; $i\ge 1$ はすべてリング状である．P_i の質量 M_i は

$$M_0=\frac{b^2}{a^2}m,\qquad M_i=\frac{r_i^2-r_{i-1}^2}{a^2}m\quad (i\ge 1) \tag{6}$$

と表される．$i\ge1$ に対しては，$q_i=(r_{i-1}+r_i)/2$ ととると，第 1 問の結果を用いて，

$$I_i=M_iq_i^2=m\frac{r_i^2-r_{i-1}^2}{a^2}q_i^2\quad (i\ge 2) \tag{7}$$

である．$I'=\sum_{i=1}^n$ とおくと，

$$I'=\sum_{i=1}^n(r_i-r_{i-1})m\frac{2q_i^3}{a^2} \tag{8}$$

$\delta(\Delta)\to 0$ の極限で

$$I'=\int_b^a dr\frac{2m}{a^2}r^3=\frac{m}{2a^2}(a^4-b^4) \tag{9}$$

となる．

I_0 については，慣性モーメントが [質量]×[長さ]^2 の次元をもつことから，

$$\frac{I_0}{I}=\frac{(b^2/a^2)m\cdot b^2}{m\cdot a^2}=\frac{b^4}{a^4} \tag{10}$$

が成り立つことが分かる．

したがって，

$$I=I_0+I'=\frac{b^4}{a^4}I+\frac{m}{2a^2}(a^4-b^4) \tag{11}$$

これを I について解いた結果は b によらず，

$$I=\frac{ma^2}{2} \tag{12}$$

である．

[補足]

$\delta r\ll a$ として，$b=a-\delta r$ ととれば，外側のリングの慣性モーメントは第 1 問の結果をそのまま用いることができる．すなわち，外側のリングの慣性モーメント I_1 は

$$I_1=\frac{a^2-(a-\delta r)^2}{a^2}ma^2 \tag{13}$$

と表される．また内側の円盤の慣性モーメント I_0 については，式 (10) を用いて，

$$I_0=\frac{(a-\delta r)^4}{a^4}I \tag{14}$$

と表される．したがって，

$$I=\frac{(a-\delta r)^4}{a^4}I+\frac{a^2-(a-\delta r)^2}{a^2}ma^2 \tag{15}$$

$$I=\frac{ma^4}{a^2+(a-\delta r)^2} \tag{16}$$

を得る．これは $\delta r\ll a$ である任意の正数 δr について成り立つので，$\delta r\to 0$ とすればよい．

第３問　$\vec{F}_1, \cdots, \vec{F}_5$ に対応したトルクを $\vec{\tau}_1, \cdots, \vec{\tau}_5$ とする．各々の力の支点の位置ベクトルを $\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_5$ とおくと，$\vec{\tau}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i$; $i = 1, \cdots, 5$ である．つまりトルクはすべて紙面に垂直な方向をむいており，$\vec{\tau}_i$ の大きさは $\vec{r}_i$ と $\vec{F}_i$ によって張られる平行四辺形の面積に等しい．$\tau_i = |\vec{\tau}_i|$ とおくと，$\tau_2 = \tau_5 = 0$, $\tau_1 = \tau_3 > \tau_4 > 0$ であることが分かる．

第４問　剛体の回転の運動方程式　おもりの初期位置が $z = 0$ になるように，鉛直上向きに z 軸をとる．また，円盤の初期角度が $\theta = 0$ になるように，（図で見て）左周り方向に θ をとる．おもりが落ちた分，ひもが引き出されることから，おもりの位置 z と，円盤の角度 θ の間には

$$-z = R\theta \tag{17}$$

の関係がある．

1. おもりと円盤の運動方程式は，ひもの張力を T として

$$M\ddot{z} = -Mg + T \tag{18}$$

$$I\ddot{\theta} = RT \tag{19}$$

式 (17) を用いて，$\ddot{z}, \ddot{\theta}$ について解けば，

$$\ddot{z} = -\frac{gMR^2}{MR^2 + I} \tag{20}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{gMR}{MR^2 + I} \tag{21}$$

を得る．

2. 張力 T は

$$T = \frac{I}{R}\ddot{\theta} = \frac{gMI}{MR^2 + I} \tag{22}$$

と表される．

第５問　剛体の回転の運動方程式　1. 運動エネルギーは

$$K = \frac{1}{2}m_1 l_1 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}m_2 l_2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{23}$$

と表される．

2. ポテンシャルエネルギーは

$$V = -m_1 g l_1 \cos\theta - m_2 g l_2 \cos\theta \tag{24}$$

と表される．このとき $\theta = \pi/2$ で手を離したときのエネルギーは 0 である．したがって，$\theta = 0$ のとき

$$\frac{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - m_1 g l_1 - m_2 g l_2 = 0$$

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g(m_1 l_1 + m_2 l_2)}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} \tag{25}$$

である．

3. $I\alpha = \tau$

4.

$$\tau = -l_1 m_1 g \sin\theta - l_2 m_2 g \sin\theta = -g(m_1 l_1 + m_2 l_2)\sin\theta$$

したがって，$\tau_0 = -g(m_1 l_1 + m_2 l_2)$.

5. $\theta \ll 1$ のとき，$\sin\theta \sim \theta$ とすれば，

$$I\ddot{\theta} = \tau_0 \theta \tag{26}$$

となり，単振動になることが分かる（$\tau_0 < 0$ に注意）.

6. 角振動数は $\sqrt{-\tau_0/I}$. したがって周期は $2\pi\sqrt{-I/\tau_0}$ である.