

力学 B 演習問題 II 解答・解説

TA : 穴釜 剛

2010 年 8 月 26 日

1 解答

以下の問題で、重力加速度 g は 9.8m/s^2 とする。SI 単位系の基本単位 (m,kg,s) だけを用いた。

II-5

1.(慣性系で見たとき) 重力 (Mg)・垂直抗力 (N)・摩擦力 (N_f)

回転座標系で見ると、慣性力(この場合は遠心力)が必要。

2. 重力...鉛直下向き、垂直抗力...向心方向、摩擦力...鉛直上向き

3. 半径 r , 各振動数 ω の等速円運動を行っているので、時刻 t において人の位置 $\mathbf{r}(t)$ は

$$\mathbf{r}(t) = r(\cos(\omega t)\mathbf{e}_x + \sin(\omega t)\mathbf{e}_y) \quad (1)$$

と書ける。ただし、 \mathbf{e}_x は x 方向の単位ベクトル。これの2階微分によって、

$$\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} = -\omega^2\mathbf{r}(t) \quad (2)$$

となる。したがって、加速度の大きさは

$$\omega^2 r \quad (3)$$

となる。

4. 重力と、摩擦力は釣り合っているなので、ある時刻の運動方程式は、

$$m\mathbf{a} = \mathbf{N} \quad (4)$$

である。したがって、垂直抗力の大きさは

$$N = Mr\omega^2 \quad (5)$$

となる。

(別解) 回転座標系では、垂直抗力と遠心力が釣り合っているので、

$$0 = -N + Mr\omega^2 \quad (6)$$

となる。ただし、遠心力が $Mr\omega^2$ となることは事前に計算が必要。

5. 最大静止摩擦力 $\mu_s N$ よりも重力が大きいという条件 $\mu_s N = \mu_s Mr\omega^2 < Mg$ より

$$\omega^2 \leq \frac{g}{\mu_s r} \quad (7)$$

$$\omega \leq \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}} \quad (8)$$

したがって、

$$\omega_m = \sqrt{\frac{g}{\mu_s r}} \quad (9)$$

6. 与えられた数値を代入すると

$$\omega_m = 3.94 \quad (\text{s}^{-1}) \quad (10)$$

(解説)5 で求めた条件式は、人の質量 M に寄らない。したがって、ローターはどんな体重の人でも使用可能である。

II-6

1. 極座標 (r, θ) における運動方程式は動径方向、接線方向の力をそれぞれ F_r, F_θ とすると

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r \quad (11)$$

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = F_\theta \quad (12)$$

で与えられる*1。ただし、 $\dot{\theta} \equiv \frac{d\theta}{dt}, \ddot{\theta} \equiv \frac{d^2\theta}{dt^2}$ である。垂直抗力を N とすると、この方程式は

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = mg \cos \theta - N \quad (13)$$

$$\frac{m}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\theta}) = -mg \sin \theta \quad (14)$$

となる。 $r = R$ で一定の範囲内では

$$mR\dot{\theta}^2 = N - mg \cos \theta \quad (15)$$

$$mR\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \quad (16)$$

である。尚、本設問では、

$$\mathbf{r} = R(\mathbf{x} \sin \theta(t) - \mathbf{y} \cos \theta(t)) \quad (17)$$

を2階微分することによって、簡単に解答を得られる。

2. 式(15)より、

$$N = mR\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \quad (18)$$

である。速度が v のとき、 $R\dot{\theta} = v$ より

$$N = \frac{mv^2}{R} + mg \cos \theta \quad (19)$$

3. $N = 0$ となった点で物体は面から離れる。面から離れるときの速度を v_1 とすると

$$0 = \frac{mv_1^2}{R} + mg \cos \theta_0 \quad (20)$$

$$v_1^2 = -Rg \cos \theta_0 \quad (21)$$

エネルギー保存則より、 $\pi/2 < \theta_0 < \pi$ に注意すると

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + mgR(1 - \cos \theta_0) \quad (22)$$

$$v_0^2 = v_1^2 + 2gR(1 - \cos \theta_0) \quad (23)$$

$$v_0^2 = gR(2 - 3 \cos \theta_0) \quad (24)$$

したがって、速さ v_0 は

$$v_0 = \sqrt{gR(2 - 3 \cos \theta_0)} \quad (25)$$

である。

*1 導出は、多くの力学の教科書に書いてあります。例えば「力学」(小出 昭一郎 著 岩波書店) など。

II-13

1. 弾丸がブロックを貫通する際、加速度 $-\alpha$ の等加速度運動をすると仮定する。ブロックと弾丸が衝突する点を $x = 0$ として、鉛直上向きに x 座標を取り、弾丸の質力を $m(=10\text{g})$ として運動方程式を立てると

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\alpha \quad (26)$$

となる。ただし、後の設問で評価するように、重力は無視した。 $t = 0$ で $x = 0, \frac{dx}{dt} = v_0$ として積分を行うと

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha t + v_0 \quad (27)$$

$$x = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + v_0 t \quad (28)$$

である。衝突時の時刻 t と α を求めるために、この2式に、 $v_0=1000\text{m/s}, x=0.1\text{m}^{*2}, \frac{dx}{dt} = v_t=400\text{m/s}$ を代入すると

$$400 = -\alpha t + 1000 \quad (29)$$

$$0.1 = -\frac{1}{2}\alpha t^2 + 1000t \quad (30)$$

となる。式 (29) から得られる $\alpha t = 600$ を式 (30) に代入して

$$0.1 = -\frac{1}{2} \times 600 \times t + 1000t \quad (31)$$

$$t = 1.43 \times 10^{-4} \quad (\text{s}) \quad (32)$$

となる。

(別解) 平均速度 $v = 700\text{m/s}$ を求めて、 $0.1 = 700t$ とするのも可能。

2. 貫通する前の運動量から貫通した後の運動量を引くと

$$m(v_0 - v_t) = 0.01(1000 - 400) = 6 \quad \text{kgm/s} \quad (33)$$

3. 貫通の際にブロックから受ける力 $m\alpha$ と重力 mg の比をとると

$$\frac{mg}{m\alpha} = \frac{g}{\alpha} = \frac{9.8}{600/(1.43 \times 10^{-4})} = 2.34 \times 10^{-6} \quad (34)$$

したがって、重力は、衝突の際に受ける力よりも十分小さいために、無視できる。4. 弾丸がブロックを貫通している際、重力は無視できる為、弾丸とブロックの間には内力しか働いていないとみなせる。したがって、弾丸が失った運動量はブロックが得た運動量なので、衝突後のブロックの運動量は 6kgm/s である。ブロックの質量は $M=5\text{kg}$ より、貫通後のブロックの速度 V は $MV = 6$ から

$$V = \frac{6}{5} = 1.2 \quad \text{m/s} \quad (35)$$

である。

5. ブロックが $h(\text{m})$ まで跳ね上がったとする。エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \quad (36)$$

$$h = \frac{V^2}{2g} = \frac{1.2^2}{2 * 9.8} = 7.35 \times 10^{-2} \quad \text{m} \quad (37)$$

跳ね上がる。

*2 ブロックはほとんど動かないと仮定した

2 講評

非常によく出来ていた人がいる一方、全然解けていない人もいた。評価では、A もしくは C と、最近流行の二極化が起きていた。

2.1 採点基準

採点基準は、考え方・計算共に合っている場合、考え方はあっているが計算は間違っている場合、考え方が合っていない、もしくは考え方はあっているものの、計算がまったくできていない、計算、単位両方にミスがある場合などは×とした。×が稀に混同している場合があるが、以下の評価基準に照らし合わせれば、差は出ないので、気にしないでください。

評価は

S...パーフェクト(ただし、成績評価では A と同様に扱う。)

A...×がなし。かつ、×が少ない。

B...×が2つ程度。かつ、単位ミス程度の×しかない。(答えの理由無しで×になったものが複数あると C)

C...それ以下。(あまりに×ばかりだと D)

D...(評定なし) 未提出・遅れ・ほぼすべて間違っている・明らかな写しなどとした。

今回も、甘めな採点になってしまった。。A 以上の答えは大体 OK だが、A⁻ は一部、導出をしていない場合である。本当は B にしようかと思ったが、B はもっと本質的な間違いがある答案なので、同一視するわけにはいかない、ということからおまけで A になっている。B,C の答えは、明らかに問題。友人との議論も推奨されているわけだし、時間もテストと異なり(現実的には有限だけど)無制限なので、もっとがんばりましょう。S は3名です。前回から連続で S の人は0名でした。2回連続 A 以上(含 S,A⁻)の人は8名です。もっと多いかと思っていましたが残念です。

2.2 各設問について

II-5

慣性系と回転座標系を混同している人がいるのは残念だった。座標系について、触れていない答えは、常識的に考えて、慣性系であると解釈した。したがって、「回転座標系である」ことを述べていないのに遠心力を書いてある答えは×である。また、2,3 については、「円運動なので $\omega^2 r$ 」等、理由になっていない理由を書いている答案が多かった。これについては、きちんと導出してくれた人を評価するために、減点対象()とした。尚、何名か、5 の条件式が質量 M に依存しないことをコメントしている優れた答案があった。すばらしいです。ただ式を解くだけでなく、その結果を、現実の物理現象と照らし合わせて考察を行うことは非常に重要である。

II-6

全体的に出来が良くなかった。運動方程式を導出せずに書いている人が非常に多かった。「講義ノートの単振り子の運動方程式の箇所を参考にせよ」と書いてあったが、「ノートを写せ」とは書いていなかったので、導出すべきである。また、それ以前の問題として、運動方程式が何も定義せず、各方向に対して、両方とも加速

度 a として、力だけを書いているものもあった。

II-13

3 問中、一番出来が良かった。ほとんどの答案では述べられていなかったが、1 では「ブロックがほとんど動かないと仮定」して、計算を行っているが、4 まで計算することによって、その仮定が正しかったことを確認できる。より正確に議論したければ、1 で「ブロックは δ だけ上昇したが、その間、弾丸はブロック内で等加速度運動を行った」として計算を行えばよい。その後の計算で δ が十分に小さいことが示せるはずである*³。また、前回の講評で注意したはずであるが、ブロックが数十 m 跳ね上がるとか、貫通までに数百秒時間がかかるとか、現実的でない解答を作っている人も数名いた。再度強調しますが、計算で答えを出すだけでなく、自然現象と合致した答えが出ているかどうかを確かめましょう。

*³ δ が大きいとすれば、矛盾が生じる。