量子力学 3 量子力学 GII, 演習問題 V
電磁場の量子化

加藤雄介

2019 年 1 月 27 日

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。

目的

- 電磁場の量子化の手順を学ぶ（Coulomb gauge)。
- 同様の手順で実スカラー場の量子化の手順も習得する。
- 量子化したあとの場の物理量を生成・消滅演算子で表せるようになる。

問題 V − 01「量子化された電磁場のポインティングベクトルと運動量密度を生成・消滅演算子で表す」

1. ポインティングベクトル
$$\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\mu_0} \tag{1}$$
を $\hat{c}_\lambda,\hat{c}_\lambda^\dagger$ を用いて表せ。
2. 電磁場の運動量密度
$$\boldsymbol{g} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{c^2\mu_0} \tag{2}$$
を $\hat{c}_\lambda,\hat{c}_\lambda^\dagger$ を用いて表せ。

問題 V − 02「実スカラー場の量子化」

$\phi(\boldsymbol{r},t)$ を次の波動方程式に従う古典的な実スカラー場であるとする:

$$\frac{\partial^2\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} - v^2\boldsymbol{\nabla}^2\phi(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{3}$$

この場の運動エネルギーとポテンシャルエネルギーはそれぞれ

$$K[\phi] = \frac{\rho}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\frac{\partial\phi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right)^2, \quad V[\phi] = \frac{\rho v^2}{2}\int \mathrm{d}\boldsymbol{r}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi(\boldsymbol{r},t)\right)^2 \tag{4}$$

で与えられる。ただし ρ, v は時間、場所によらない。以下では $\phi(\boldsymbol{r},t)$ は周期的境界条件を満たすものとし

$$\phi(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\boldsymbol{k}} Q_{\boldsymbol{k}}(t)\frac{e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{\Omega}}, \quad \Omega = L^3, \quad \boldsymbol{k} = \left(\frac{2\pi n_x}{L}, \frac{2\pi n_y}{L}, \frac{2\pi n_z}{L}\right), \quad n_x, n_y, n_z \in \mathrm{Z} \tag{5}$$

と展開できるものとする。

1. $Q_{\boldsymbol{k}}(t)$ が運動方程式
$$\ddot{Q}_{\boldsymbol{k}}(t) = -\omega_k^2 Q_{\boldsymbol{k}}(t) \tag{6}$$
に従うことを示し、角振動数 $\omega_k(>0)$ を求めよ。

2. ラグランジアンが

$$\mathcal{L} = \frac{\rho}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} \dot{Q}_{\boldsymbol{k}}\dot{Q}_{-\boldsymbol{k}} - \frac{\rho\omega_k^2}{2}\sum_{\boldsymbol{k}} Q_{\boldsymbol{k}}Q_{-\boldsymbol{k}} \tag{7}$$

と表されることを示せ。

3. $Q_{\boldsymbol{k}}$ と $Q_{-\boldsymbol{k}}$ を独立であるとみなし（第１４回講義「簡便な量子化の方法」を参照のこと）、一般化運動量

$$\Pi_{\boldsymbol{k}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{Q}_{\boldsymbol{k}}} \tag{8}$$

を求めよ。

4. ハミルトニアン

$$\mathcal{H} = \sum_{\boldsymbol{k}} \Pi_{\boldsymbol{k}}\dot{Q}_{\boldsymbol{k}} - \mathcal{L} \tag{9}$$

を $\{\Pi_{\boldsymbol{k}}, Q_{\boldsymbol{k}}\}_{\boldsymbol{k}}$ を用いて表せ。

5. 正準量子化 $\{\Pi_{\boldsymbol{k}}, Q_{\boldsymbol{k}}\} \to \{\hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}}, \hat{Q}_{\boldsymbol{k}}\}$ を行い、正準交換関係

$$[\mathrm{i}\hat{\Pi}_{\boldsymbol{k}}, \hat{Q}_{\boldsymbol{k}}] = \hbar \tag{10}$$

(それ以外の演算子の組については可換) を要請する。このとき、ハミルトニアンは

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{\hat{\Pi}_0^2}{2\rho} + \frac{1}{2}\sum_{\boldsymbol{k}(\neq 0)} \hbar\omega_k \left(\hat{c}_{\boldsymbol{k}}\hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger + \hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger\hat{c}_{\boldsymbol{k}}\right), \quad [\hat{c}_{\boldsymbol{k}}, \hat{c}_{\boldsymbol{k}'}^\dagger] = \delta_{\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}'} \tag{11}$$

と書くことができる。$\hat{c}_{\boldsymbol{k}}$ を $\hat{\Pi}_{-\boldsymbol{k}}$ と $\hat{Q}_{\boldsymbol{k}}$ を用いて表せ。

6.
$$\hat{\phi}(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{k}} \hat{Q}_{\boldsymbol{k}} \frac{e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}}{\sqrt{\Omega}} \tag{12}$$

を $\hat{Q}_0, \hat{c}_{\boldsymbol{k}}, \hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ を用いて表せ。

7.
$$\hat{\phi}^{\mathrm{H}}(\boldsymbol{r}, t) = e^{\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t/\hbar}\hat{\phi}(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\hat{\mathcal{H}}t/\hbar} \tag{13}$$

を $\hat{Q}_0, \hat{\Pi}_0, \hat{c}_{\boldsymbol{k}}, \hat{c}_{\boldsymbol{k}}^\dagger$ を用いて表せ。