量子力学 3 量子力学 GII, 演習問題 IV
散乱問題

加藤雄介

2018 年 12 月 25 日

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。
目的

- 散乱問題の演習問題を解くことによって、位相のずれ、散乱断面積の計算方法に習熟する。
- 位相のずれ、散乱断面積の計算結果について定性的な理解、解釈ができるようになる。
- 具体例を通して Born 近似の適用範囲を確かめる。
- プログラミング・数式処理ソフトに慣れる。

問題 IV − 01「球状斥力ポテンシャルに対する散乱問題」

ポテンシャル

$$U(r) = \begin{cases} U_0(>0), & r < a \\ 0, & r > a \end{cases} \tag{1}$$

の下での質量 m の粒子の波動関数を考える。エネルギーは $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, $k > 0$ で与えられるとする。 角運動量 $\hbar^2 \ell(\ell+1)$ ($\ell = 0, 1, 2, \cdots$ は角運動量の大きさを表す整数) の部分波に対する波動関数 $R_\ell(r)$ を

$$R_\ell(r) = \begin{cases} R_\ell^<(r), & r < a \\ \\ R_\ell^>(r), & r > a \end{cases} \tag{2}$$

と書く。部分波 ℓ の位相のずれを $\delta_\ell(k)$ と書く。

1. $\tan\delta_\ell(k)$ を $j_\ell(ka), n_\ell(ka), j'_\ell(ka), n'_\ell(ka), R_\ell^<(a), \left.\frac{dR_\ell^<(r)}{dr}\right|_{r=a-0}$ を用いて表せ。
2. $\kappa = |k^2 - 2mU_0/\hbar^2|^{\frac{1}{2}}$ として、$R_\ell^<(r)$ を、$j_\ell(\kappa a)$, $i_\ell(\kappa a)$（第一種変形球ベッセル関数）のうち必要なものを用いて表せ。k の値によって場合分けせよ。
3. $\tan\delta_\ell(k)$ を $j_\ell(ka), n_\ell(ka), j'_\ell(ka), n'_\ell(ka), j_\ell(\kappa a), i_\ell(\kappa a), j'_\ell(\kappa a), i'_\ell(\kappa a)$ のうち必要なものを用いて表せ。k の値によって場合分けせよ。
4. $2mU_0a^2/\hbar^2$ を適当な値にとり（0.1 とか、１とか１０とか）、
   数式処理ソフト (Mathematica（情報基盤センターの端末で利用できる）や Python(フリーソフト) など) あるいは数値計算コード (C++, Fortran) を組み、散乱断面積
   $$\sigma(k) = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\sin^2\delta_\ell(k) = \frac{4\pi}{k^2}\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(2\ell+1)}{1+\cot^2\delta_\ell(k)} \tag{3}$$
   を ka の関数として図示せよ *
5. 上記のグラフに Born 近似による散乱断面積を重ね書きせよ。
6. 4,5 で得られた結果について物理的に論じよ（低エネルギー、高エネルギー、中間のエネルギーにおける散乱）。

* 注：第一種球変形ベッセル $i_\ell(\rho)$ は第一種変形ベッセル $I_\ell(\rho)$ を用いて

$$i_\ell(\rho) = \left(\frac{\pi}{2\rho}\right)^{\frac{1}{2}} I_{\ell+\frac{1}{2}}(\rho) \tag{4}$$

で与えられる。通常のソフトウェアで変形ベッセル関数は呼び出せると思う (Mathematica, Python では第一種変形ベッセル関数そのものが呼び出せる)。(3) における ℓ についての和は上限をいくつかの有限値に置き換え、その結果が上限のとり方によらずほぼ変わらないことを確かめよ。