量子力学3 量子力学GII, 演習問題 (1) 第二量子化（担当：加藤雄介） 2013.11.04

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。

問題Ｉ－１「第二量子化　基礎ベクトルの規格直交性」

$$\langle y_1, y_2, \cdots, y_M | x_1, x_2, \cdots, x_N \rangle = \frac{\delta_{M,N}}{N!} \sum_P \zeta^P \delta(y_1, x_{p(1)}) \delta(y_2, x_{p(2)}) \cdots \delta(y_N, x_{p(N)}) \tag{1}$$

を示せ。

問題Ｉ－２「第二量子化　場の演算子の $|\Psi_\nu\rangle$ への作用」

$$\hat{\psi}(x_1)|\Psi_\nu\rangle = \sqrt{N} \int \mathrm{d}y_2 \cdots \int \mathrm{d}y_N \Psi_\nu(x_1, y_2, \cdots y_N) |y_2, \cdots, y_N\rangle \tag{2}$$

を示せ。

問題Ｉ－３「第二量子化　$|\Psi_\nu\rangle$ の完全性」

$$\sum_\nu \Psi_\nu(x_1, \cdots, x_N) \Psi^*_\nu(x'_1, \cdots, x'_N) = \frac{1}{N!} \sum_{P \in S_N} \zeta^P \delta(x'_1, x_{p(1)}) \cdots \delta(x'_N, x_{p(N)})$$

ならば $\sum_\nu |\Psi_\nu\rangle\langle\Psi_\nu| = 1$ となることを示せ

問題Ｉ－４「第二量子化　場の演算子を用いた一粒子演算子の表式」

$$\hat{O}^{(1)} \equiv \sum_j \hat{o}^{(1)}(x_j) \leftrightarrow \int \mathrm{d}x_1 \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{o}^{(1)}(x_1) \hat{\psi}(x_1) \tag{3}$$

を示せ。

問題Ｉ－５「第二量子化　場の演算子を用いた二粒子演算子の表式」

$$\hat{O}^{(2)} \equiv \sum_{j<k} \hat{o}^{(2)}(x_j, x_k) \leftrightarrow \frac{1}{2} \int \mathrm{d}x_1 \int \mathrm{d}x_2 \hat{\psi}^\dagger(x_1) \hat{\psi}^\dagger(x_2) \hat{o}^{(2)}(x_1, x_2) \hat{\psi}(x_1) \hat{\psi}(x_2) \tag{4}$$

を示せ。

問題Ｉ－６「第二量子化　粒子数演算子」

$\hat{N} = \int dx \hat{\psi}^\dagger(x) \hat{\psi}(x)$ に対して、

$$\hat{N}|x_1, \cdots, x_M\rangle = M|x_1, \cdots, x_M\rangle, \quad |x_1, \cdots, x_M\rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{N!}} \hat{\psi}^\dagger(x_1) \cdots \hat{\psi}^\dagger(x_N)|0\rangle$$

が成り立つことを示せ。($\hat{\psi}(x)|0\rangle = 0$, $[\hat{N}, \hat{\psi}^\dagger(x)] = \hat{\psi}^\dagger(x)$ を用いよ。)

問題Ｉ－７「第二量子化　基礎ベクトルの意味」

基礎ベクトル $\hat{\rho}(x)|x_1, \cdots, x_N\rangle$ は $\hat{\rho}(x) \equiv \hat{\psi}^\dagger(x)\hat{\psi}(x)$ の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。