量子力学3 量子力学GII, 演習問題(2) 第二量子化（担当：加藤雄介）　2014.1.27

記号の詳細は講義ノートを参照のこと。I の目的

- 物理量の第二量子化表示 (エネルギー、局所物理量、密度行列)
- 第一量子化での波動関数と第二量子化での状態ベクトルの対応
- 第二量子化表示されたハミルトニアンの対角化 (応用)

問題 I − 06「第二量子化　粒子数密度」

スピン 1/2 を持つフェルミオン系における粒子数密度 $\hat{\rho}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$ を場の演算子 $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}),\ \sigma = \uparrow, \downarrow$ を用いて表せ。

問題 I − 07「第二量子化　粒子流密度（中性原子）」

スピン 0、電荷 0 のボソン系における粒子流密度を場の演算子 $\hat{\psi}(\mathbf{r})$ を用いて表せ。

問題 I − 08「第二量子化　電流密度（荷電粒子）」

スピン 1/2, 電荷 q のフェルミオン系における電流密度を場の演算子 $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}),\ \sigma = \uparrow, \downarrow$ を用いて表せ。

問題 I − 09「第二量子化　スピン密度」

スピン 1/2 を持つフェルミオン系におけるスピン密度

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{s}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

の x, y, z 成分それぞれを場の演算子 $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}),\ \sigma = \uparrow, \downarrow$ を用いて表せ。

問題 I − 10「第二量子化　スピン密度」

スピン 1/2 を持つフェルミオン系におけるスピン密度

$$\hat{\mathbf{s}}(\mathbf{r}) = \sum_{j=1}^{N} \mathbf{s}_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j)$$

の x, y, z 成分それぞれを場の演算子 $\hat{\psi}_\sigma(\mathbf{r}),\ \sigma = \uparrow, \downarrow$ を用いて表せ。

問題 I − 11「第二量子化　生成消滅演算子」

スピン 1/2 を持つフェルミオン系における 1 粒子状態

$$\varphi_{k,\uparrow}(\mathbf{r}, \sigma) = \frac{\exp(\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\sqrt{\Omega}} \alpha(\sigma) \tag{1}$$

$$\varphi_{k,\downarrow}(\mathbf{r}, \sigma) = \frac{\exp(\mathrm{i}\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{\sqrt{\Omega}} \beta(\sigma) \tag{2}$$

(Ω は体積) に対する消滅演算子をそれぞれ $\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}, \hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow}$ とする。このとき

$$\sum_{\mathbf{k}} \sum_{s=\uparrow,\downarrow} \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \hat{a}^\dagger_{\mathbf{k},s} \hat{a}_{\mathbf{k},s} \tag{3}$$

$$\frac{1}{2\Omega}\sum_{\mathbf{k},\mathbf{k}',\mathbf{q}}\sum_{s=\uparrow,\downarrow}\sum_{s'=\uparrow,\downarrow}\frac{U_0}{q^2+\kappa^2}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}+\mathbf{q},s}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}'-\mathbf{q},s'}\hat{a}_{\mathbf{k}',s'}\hat{a}_{\mathbf{k},s} \tag{4}$$

$$\sum_{\mathbf{k}}\frac{\hbar}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\uparrow}\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}-\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow}\right) \tag{5}$$

$$\sum_{\mathbf{k}}\frac{\hbar}{2}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\uparrow}\hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow}+\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}\right) \tag{6}$$

$$\sum_{\mathbf{k}}\frac{\hbar}{2\mathrm{i}}\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\uparrow}\hat{a}_{\mathbf{k},\downarrow}-\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k},\downarrow}\hat{a}_{\mathbf{k},\uparrow}\right) \tag{7}$$

はそれぞれどのような物理量を表すか。

問題 I − 12「第二量子化　状態ベクトルと波動関数の対応」

$|\mathrm{vac}\rangle$ を真空の状態ベクトルとする。スピン 1/2 のフェルミオンの 2 粒子状態を表す状態ベクトル

$$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k_1},\uparrow}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k_2},\downarrow}|\mathrm{vac}\rangle \tag{8}$$

に対応する波動関数 $\Psi(\mathrm{r}_1,\sigma_1,\mathrm{r}_2,\sigma_2)$ を求めよ。

問題 I − 13「第二量子化　状態ベクトルと波動関数の対応」

$|\mathrm{vac}\rangle$ を真空の状態ベクトルとする。スピン 1/2 のフェルミオンの 2 粒子状態を表す状態ベクトル

$$\left(\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k_1},\uparrow}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k_2},\downarrow}-\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k_1},\downarrow}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k_2},\uparrow}\right)|\mathrm{vac}\rangle \tag{9}$$

に対応する波動関数 $\Psi(\mathrm{r}_1,\sigma_1,\mathrm{r}_2,\sigma_2)$ を求めよ。その状態が合成スピン角運動量の固有状態であることを示し、その固有値を求めよ。

問題 I − 14「第二量子化　状態ベクトルと波動関数の対応」

$|\mathrm{vac}\rangle$ を真空の状態ベクトルとする。スピン 1/2 のフェルミオンの N 粒子状態を表す状態ベクトル

$$\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k_1},\sigma_1}\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k_2},\sigma_2}\cdots\hat{a}^{\dagger}_{\mathbf{k}_N,\sigma_N}|\mathrm{vac}\rangle \tag{10}$$

に対応する波動関数を求めよ。ただし、$\mathbf{k}_j=\mathbf{k}_l$ のとき、$\sigma_j\neq\sigma_l$ とする。

問題 I − 15「生成演算子の性質」 物理量 $\hat{O}$ に対して、固有値 μ の固有状態 $|\mu\rangle$

$$\hat{O}|\mu\rangle=\mu|\mu\rangle$$

があるとする。生成演算子 $\hat{a}_j$ ($j=1,2,\cdots$ は 1 粒子状態のインデックス) が交換関係

$$[\hat{O},\hat{a}^{\dagger}_j]=\lambda_j\hat{a}^{\dagger}_j$$

を満たすとき、状態

$$\hat{a}^{\dagger}_1\hat{a}^{\dagger}_2\cdots\hat{a}^{\dagger}_l|\mu\rangle \tag{11}$$

は $\hat{O}$ の固有状態であり、その固有値は

$$\mu+\sum_{j=1}^{l}\lambda_j \tag{12}$$

で与えられることを示せ。

問題 I − 16「生成演算子の性質」 物理量 $\hat{O}$ に対して、生成演算子 $\hat{a}_j$ ($j = 1, 2, \cdots$ は 1 粒子状態のインデックス) が交換関係

$$[\hat{O}, \hat{a}_j^\dagger] = \lambda_j \hat{a}_j^\dagger$$

を満たすとき、状態

$$\mathrm{e}^{u\hat{O}} \hat{a}_j^\dagger \mathrm{e}^{-u\hat{O}} = e^{u\lambda_j} \hat{a}_j^\dagger \tag{13}$$

を示せ。