2016 年度 A セメスター　電磁気学 B（担当：加藤雄介）
レポート問題 III 解答例 2017.01.11 (文責：福井)

第 1 問

(1) 点 $\boldsymbol{r}=(x,y,z)$ における電場 $\boldsymbol{E}_0=(0,0,E_0)$ による電位 $\phi_0(\boldsymbol{r})$ は基準点を $(0,0,a)$ とすると

$$\phi_0(\boldsymbol{r}) = -\int_{(0,0,a)}^{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{E} \tag{1}$$
$$= -\int_a^z \mathrm{d}z'\ E_0 \tag{2}$$
$$= -E_0(z-a) \tag{3}$$

となる.

(2) 問題文より, 導体表面に誘起された電荷による電場 $\boldsymbol{E}'$ は大きさ p の電気双極子　（勿論 z 方向）の作る電場とみなせるので

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}-\frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right) \tag{4}$$

であり, この電場の動径方向成分 E'_r はレポート問題 II の第 3 問と同様で, r 方向の単位ベクトルは

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{5}$$

なので

$$E'_r = \boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{e}_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5}\boldsymbol{r}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)-\frac{1}{r^3}\boldsymbol{p}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \tag{6}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{3pr\cos\theta}{r^5}\frac{r^2}{r}-\frac{pr\cos\theta}{r^4}\right) \tag{7}$$
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2p\cos\theta}{r^3} \tag{8}$$
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{p\cos\theta}{r^3} \tag{9}$$

である.
ここで, 基準点を $(0,0,a)$ とした点 $\boldsymbol{r}$ の電位

$$\phi'(\boldsymbol{r}) = -\int_{(0,0,a)}^{\boldsymbol{r}} \mathrm{d}\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}') \tag{10}$$

を求める. 計算の簡単のために積分路を 2 つに分ける. すなわち, 基準点 $(0,0,a)$ から無限遠点までの積分と無限遠点から位置 $\boldsymbol{r}$ の積分に分ける (電位は積分路に依存しないことを思い出す). 基準点 $(0,0,a)$ から無限遠点までは z 軸に沿って積分するので $\theta=0$, またもう一つの積分路は無限遠点から点 $\boldsymbol{r}$ へ向か

う動径方向逆向きの直線である．　よって

$$\phi'(\boldsymbol{r}) = -\left[\int_a^\infty \mathrm{d}r'\ E'_r(\boldsymbol{r}') + \int_\infty^r \mathrm{d}r'\ E'_r(\boldsymbol{r}')\right] \tag{11}$$

$$= -\frac{p}{2\pi\varepsilon_0}\left(\left[-\frac{1}{2r'^2}\right]_a^\infty + \cos\theta\left[-\frac{1}{2r'^2}\right]_\infty^r\right) \tag{12}$$

$$= -\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\cos\theta}{r^2}\right) \tag{13}$$

$$= \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\cos\theta}{r^2} - \frac{1}{a^2}\right) \tag{14}$$

となる．

(3) (1), (2) で求めた電位を合わせると

$$\phi(\boldsymbol{r}) = \phi_0(\boldsymbol{r}) + \phi'(\boldsymbol{r}) \tag{15}$$

$$= -E_0(z-a) - \frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{\cos\theta}{r^2}\right) \tag{16}$$

であるが, 導体表面 $(r = a,\ z = a\cos\theta)$ では

$$\phi(\boldsymbol{r}) = -E_0(a\cos\theta - a) + \frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - \frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \tag{17}$$

$$= \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - aE_0\right)\cos\theta - \left(\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 a^2} - aE_0\right) \tag{18}$$

であるが, 導体表面では電位が位置に依らず一定であるはずなので, $\cos\theta$ の係数はゼロになるはずである．このことより

$$\frac{p}{4\pi\varepsilon_0} = aE_0 \tag{19}$$

であり, これより

$$p = 4\pi\varepsilon_0 a^3 E_0 \tag{20}$$

となり p の大きさが求まる．

(4) 電場の動径方向成分を考えると, 導体表面のすぐ外側では $(r = a)$

$$E_r = E_{0r} + E'_r \tag{21}$$

$$= E_0\cos\theta + \frac{p\cos\theta}{2\pi\varepsilon_0 a^3} \tag{22}$$

$$= E_0\cos\theta + 2E_0\cos\theta \tag{23}$$

$$= 3E_0\cos\theta \tag{24}$$

である ((3) で求めた p の値を用いる)．12 月 7 日の講義で示したように導体のすぐ外側の電場は法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を用いて

$$\boldsymbol{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\boldsymbol{n} \tag{25}$$

となるので,

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0} = 3E_0 \cos\theta \tag{26}$$

であり

$$\sigma(\theta) = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\theta \tag{27}$$

が導体表面に誘起される電荷面密度である．（$E_0 > 0$ ならば）$\cos\theta > 0$, つまり z 軸が正の領域では正で $\cos\theta < 0$ つまり z 軸が負の領域ではでは負の電荷が誘起される．この電荷により導体内部にできる $-z$ 向きの電場によって, ＋ z 向きの一様な電場を打ち消すことで導体内部の合成電場がゼロになる．

第 2 問

(1) 円形回路上の点 $\boldsymbol{r}' = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ の電流素片が点 $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$ に作る磁場を考える．点 $\boldsymbol{r}' = (a\cos\theta, a\sin\theta, 0)$ の電流素片は

$$\mathrm{d}\boldsymbol{I} = aI \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\theta \tag{28}$$

であるので, 点 $\boldsymbol{r} = (0, 0, z)$ につくる磁場 $\boldsymbol{B}(z)$ は Biot-Savart の法則より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{B}(z) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \oint \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{I} \times (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} && (29)\\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \ \frac{aI}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -a\cos\theta \\ -a\sin\theta \\ z \end{pmatrix} && (30)\\
&= \frac{aI}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \ \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} z\cos\theta \\ z\sin\theta \\ a\sin^2\theta + a\cos^2\theta \end{pmatrix} && (31)\\
&= \frac{a^2 I}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \ \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \boldsymbol{e}_z && (32)\\
&= \frac{a^2 I}{2\varepsilon_0 c^2 (a^2 + z^2)^{3/2}} \boldsymbol{e}_z && (33)
\end{aligned}$$

である．ここで, $\boldsymbol{e}_z = (0, 0, 1)$ は z 方向の単位ベクトルである．

(2) (1) の結果を用いると (コイルが n 巻きであることに注意)

$$\boldsymbol{B}(z) = \frac{na^2 I}{2\varepsilon_0 c^2} \left[\frac{1}{\{(z - d/2)^2 + a^2\}^{3/2}} + \frac{1}{\{(z + d/2)^2 + a^2\}^{3/2}} \right] \boldsymbol{e}_z \tag{34}$$

となる．

(3) Taylor 展開より

$$\left[\left(z\pm\frac{d}{2}\right)^2+a^2\right]^{-3/2} = \left(a^2+\frac{d^2}{4}\right)^{-3/2} - \frac{3}{2}\left[\left(z\pm\frac{d}{2}\right)^2+a^2\right]^{-5/2}\times 2\left(z\pm\frac{d}{2}\right)\Bigg|_{z=0} z \tag{35}$$

$$- \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[3\left(z\pm\frac{d}{2}\right)\left\{\left(z\pm\frac{d}{2}\right)^2+a^2\right\}^{-5/2}\right|_{z=0}\frac{z^2}{2!}+\cdots \tag{36}$$

$$\simeq \left(a^2+\frac{d^2}{4}\right)^{-3/2} \mp \frac{3}{2}d\left(a^2+\frac{d^2}{4}\right)^{-5/2} z \tag{37}$$

$$-3\left[\left(a\pm\frac{d}{2}\right)^2+a^2\right]^{-5/2}\Bigg|_{z=0}\frac{z^2}{2}+15\left(z\pm\frac{d}{2}\right)^2\left[\left(z\pm\frac{d}{2}\right)^2+a^2\right]^{-7/2}\Big|_{z=0}\frac{z^2}{2} \tag{38}$$

$$= \left(a^2+\frac{d^2}{4}\right)^{-3/2} \mp \frac{3}{2}d\left(a^2+\frac{d^2}{4}\right)^{-5/2} z - \frac{3}{2}\left(a^2+\frac{d^2}{4}\right)^{-5/2} z^2 \tag{39}$$

$$+\frac{15}{2}\frac{d^2}{4}\left(a^2+\frac{d^2}{4}\right)^{-7/2} z^2 \tag{40}$$

なので

$$\boldsymbol{B}(z) = \frac{na^2I}{2\varepsilon_0c^2}\left[\frac{1}{(a^2+d^2/4)^{3/2}}+\frac{\frac{3}{2}dz}{(a^2+d^2/4)^{5/2}}+\frac{z^2}{2}\frac{\frac{15}{4}d^2-3\left(a^2+\frac{d^2}{4}\right)}{(a^2+d^2/4)^{7/2}}\right. \tag{41}$$

$$\left.\frac{1}{(a^2+d^2/4)^{3/2}}-\frac{\frac{3}{2}dz}{(a^2+d^2/4)^{5/2}}+\frac{z^2}{2}\frac{\frac{15}{4}d^2-3\left(a^2+\frac{d^2}{4}\right)}{(a^2+d^2/4)^{7/2}}\right]\boldsymbol{e}_z \tag{42}$$

$$= \frac{na^2I}{2\varepsilon_0c^2}\left[\frac{2}{(a^2+d^2/4)^{3/2}}+\frac{\frac{15}{4}d^2-3\left(a^2+\frac{d^2}{4}\right)}{(a^2+d^2/4)^{7/2}}z^2\right]\boldsymbol{e}_z \tag{43}$$

となる．
またここで，　$d=a$ とすると

$$\boldsymbol{B}(z) = \frac{na^2I}{2\varepsilon_0c^2}\left[\frac{2}{\left(\frac{5}{4}a^2\right)^{3/2}}+\frac{\cancel{\frac{15}{4}a^2-3\cdot\frac{5}{4}a^2}}{\left(\frac{5}{4}a^2\right)^{7/2}}z^2\right]\boldsymbol{e}_z \tag{44}$$

$$= \frac{na^2I}{\varepsilon_0c^2}\frac{8}{5\sqrt{5}a^3} \tag{45}$$

$$= \frac{8\sqrt{5}nI}{25\varepsilon_0c^2a}\boldsymbol{e}_z \tag{46}$$

となり，z の 2 次まででは磁場は定数となる．このように，Helmholtz コイルは原点に一様性の高い磁場を作る．